PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1919. 20. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 22 am 30. Oktober 1919.

INHALT:

Originalmitteilungen:
W. Pauli jun., Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl. S. 457.
H. Mache, Eine schallempfindliche Flamme. S. 467.
H. Mache, Eine einfache Demonstration zum Huyghensschen Prinzip. S. 468.
H. Witte, Über den Sehraum. Achte Mitteilung: Höchstraum und Mindestraum. S. 470.
E. Rüchardt, Bemerkung zu der Notiz von H. v. Dechend und W. Hammer: „Szintillation bei Kanalstrahlen". S. 473.
R. Seeliger, Notiz zu dem Aufsatze von Herrn Jentzsch-Gräfe über die Mechanik des Freiballons. S. 474.
Zusammenfassende Bearbeitungen:
E. Schrödinger, Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung. S. 474.
Besprechungen:
M. Abraham, Theorie der Elektrizität. I. S. 480.
W. Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. S. 480.
Personalien. S. 480. **Angebote.** S. 480.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur Theorie der Gravitation und der Elektrizität von Hermann Weyl.

Von Wolfgang Pauli jun.

Im Sommer 1918 wurde von H. Weyl eine Arbeit veröffentlicht[1]), die einen Weiterbau der allgemeinen Relativitätstheorie auf Grund einer Verallgemeinerung der Riemannschen Geometrie von großer prinzipieller Tragweite enthält. So wie sich die nichteuklidische Geometrie von der euklidischen durch die Abhängigkeit der Richtungsübertragung vom Zwischenwege unterscheidet, so unterscheidet sich die allgemeine Geometrie Weyls von der Riemannschen durch die entsprechende Abhängigkeit der Längenübertragung. Physikalisch bedeutet das die Abhängigkeit der Länge eines Maßstabes und der Frequenz eines periodischen Vorganges (einer Uhr) von seiner Vorgeschichte. Das hat zur Folge, daß nur die Verhältnisse der g_{ik} zueinander durch Messungen ermittelbar sind. Hat man aber die Absolutwerte der g_{ik} in jedem Punkte willkürlich festgesetzt, so ist die Länge eines (kleinen) Maßstabes in einem Punkt P durch $g_{ik}\xi^i\xi^k$ gegeben, wenn ξ^i die (unendlich kleinen) Koordinatendifferenzen seiner Enden sind. Verschieben wir einen Maßstab vom Punkt $P(x_i)$ zum Punkt $P'(x_i + dx_i)$, so wird sein ursprüngliches Längenquadrat ds^2 in $ds^2(1 + d\varphi)$ übergehen. Unter Voraussetzung sehr plausibler Axiome wird a. a. O. gezeigt, daß $d\varphi$ eine Linearform der Verschiebungskomponenten ist:

$$d\varphi = \varphi_i\, dx_i.$$

Hätte man für den Fundamentaltensor statt g_{ik} das ebenso berechtigte Wertesystem $\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}$ gewählt, so hätte man statt φ_i

$$\bar{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

gefunden. Wir sehen also: Die Maßverhältnisse einer gegebenen metrischen Mannigfaltigkeit werden durch das Feld des metrischen Fundamentaltensors g_{ik} und des Maßstabvektors φ_i vollständig beschrieben und zwei derartigen Feldern, welche durch eine Transformation von der Form

$$\bar{g}_{ik} = \lambda g_{ik}, \quad \bar{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \qquad (\lambda)$$

auseinander hervorgehen, entspricht dieselbe Geometrie der Welt. Wir müssen deshalb postulieren, daß die Naturgesetze nicht nur gegenüber beliebigen Koordinatentransformationen, sondern auch gegenüber den Transformationen (λ) kovariant sein sollen. Dementsprechend muß auch der Tensorbegriff modifiziert werden: Von den Tensorkomponenten ist nicht nur zu verlangen, daß sie sich bei Koordinatentransformationen in bekannter Weise verhalten, sondern auch, daß sie sich bei der Transformation (λ) bloß mit einer Potenz von λ multiplizieren; der Exponent e dieser Potenz heißt das Gewicht des Tensors. Aus φ_i erhält man mittels der Operation Rot einen Tensor

$$F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}$$

vom Gewicht Null, der also eine objektive, von jeder Konvention unabhängige Bedeutung hat und (prinzipiell) durch rein geometrische Messungen gefunden werden kann. Das gibt die Möglichkeit, den Maßstabvektor φ_i mit dem elektromagnetischen Viererpotential und demgemäß F_{ik} mit der elektromagnetischen Feldstärke zu identifizieren; das erste System der Maxwellschen Gleichungen folgt dann unmittelbar aus der Definition von F_{ik}. Dies sind, kurz skizziert, die Grundgedanken der

1) Gravitation und Elektrizität, Berl. Ber. 1918, S. 465.

Theorie Weyls. Während sie aber nach ihrer geometrischen und ihrer formalen Seite hin namentlich in der zweiten Arbeit ihres Schöpfers[1]) ziemlich vollständig ausgebaut ist, liegen ihre physikalischen Konsequenzen noch sehr im Dunkeln[2]). Über diese ist nicht viel mehr bekannt, als daß die Naturgesetze sich aus einem Wirkungsprinzip

$$\delta \int W \, d\omega = 0$$

herleiten lassen müssen und daß dann zwischen ihnen die notwendigen fünf Identitäten tatsächlich bestehen[3]). Der Verfasser hat es sich deshalb in dieser Arbeit zur Aufgabe gemacht, die Theorie von Weyl in dieser Richtung genauer zu untersuchen.

Wir stellen zunächst die für die eigentliche Untersuchung nötigen Hilfsformeln zusammen (§ 1), hierauf diskutieren wir die naheliegendsten Ansätze für die Wirkungsfunktion und die unmittelbaren Folgerungen aus den elektromagnetischen Grundgleichungen (§ 2). Sodann werden die Feldgleichungen der Gravitation ermittelt (§ 3) und schließlich behandeln wir das Elektronproblem für eine spezielle Wirkungsfunktion (§ 4).

§ 1. Mathematische Hilfsbetrachtungen.

Um den Gang der Entwicklungen später nicht zu unterbrechen, schicken wir einige mathematische Hilfssätze und Hilfsformeln voraus. Dabei gehen wir aus von der bekannten[4]) Relation

$$\Gamma^r_{ik} = \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix} - \tfrac{1}{2}(\delta^r_i \varphi_k + \delta^r_k \varphi_i - g_{ik}\varphi^r), \qquad (1)$$

aus der durch Verjüngung noch folgt

$$\Gamma^r_{ir} = \begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix} - 2\,\varphi_i. \qquad (1a)$$

In dem Umstand, daß in der Theorie von Weyl überall statt der Christoffelschen Klammerausdrücke $\begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}$ die Größen Γ^r_{ik} auftreten, welche auch die φ_i enthalten, kommt die innige Verknüpfung der Gravitation mit der Elektrizität zum Ausdruck, die eine Folge der Kovarianz aller Tensoren gegenüber der Substitution (λ) (Seite 457) ist. Der Krümmungstensor R_{iklm} ist definiert durch:

$$R^i_{klm} = \frac{\partial}{\partial x_m}\Gamma^i_{kl} - \frac{\partial}{\partial x_l}\Gamma^i_{km} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{km}\,{}^{1}). \qquad (2)$$

Er zerfällt in den Tensor der „Richtungskrümmung" $\overline{R}_{iklm}$ und den Tensor der „Längenkrümmung" $-\frac{1}{2}g_{km}F_{lm}$:

$$R^i_{klm} = \overline{R}^i_{klm} - \tfrac{1}{2}\delta^i_k F_{lm}\,{}^{2})$$

$$\left(F_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right). \qquad (3)$$

Ordnen wir jedem Größensystem a_{ik} durch die Beziehung

$$\tilde{a}_{iklm} = \tfrac{1}{2}(g_{il}a_{km} + g_{km}a_{il} - g_{im}a_{kl} - g_{kl}a_{im}) \qquad (4)$$

das Größensystem $\tilde{a}_{iklm}$ zu, so ist[3])

$$\overline{R}_{iklm} = R^*_{iklm} - \tilde{\Phi}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{\varphi}_{iklm}, \qquad (5)$$

wenn man setzt

$$\Phi_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r \qquad (6)$$

$$\varphi_{ik} = \varphi_i\varphi_k - \tfrac{1}{2}g_{ik}(\varphi_r\varphi^r) \qquad (7)$$

und R^*_{iklm} den Riemann-Christoffelschen Tensor bedeutet. In vielen Fällen ist es jedoch zweckmäßig, den Krümmungstensor in anderer Weise zu zerlegen:

$$R_{iklm} = \hat{R}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{F}_{iklm} - \tfrac{1}{2}g_{ik}F_{lm}, \qquad (8)$$

$$(\overline{R}_{iklm} = \hat{R}_{iklm} - \tfrac{1}{2}\tilde{F}_{iklm}),$$

weil $\hat{R}_{iklm}$ zum Unterschied von R_{iklm} und $\overline{R}_{iklm}$ ganz dieselben Symmetrieverhältnisse aufweist wie R^*_{iklm}. Man erhält nämlich den Ausdruck für $\hat{R}_{iklm}$, indem man in (5) Φ_{ik} durch das in i und k symmetrische

$$\hat{\Phi}_{ik} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_i}\right) - \begin{Bmatrix} i\,k \\ r \end{Bmatrix}\varphi_r \qquad (9)$$

ersetzt, und es ist

$$\Phi_{ik} = \hat{\Phi}_{ik} + \tfrac{1}{2}F_{ik}. \qquad (9a)$$

Aus (4) folgt allgemein

$$\tilde{a}_{km} = g^{il}\tilde{a}_{iklm} = g^{il}\tilde{a}_{kiml} = a_{km} + \tfrac{1}{2}g_{km}a \quad (a = g^{il}a_{il}) \qquad (10)$$

$$\tilde{a} = g^{km}\tilde{a}_{km} = 3\,a \qquad (11)$$

$$\tilde{a}_{iklm}\tilde{a}^{iklm} = 2\,\tilde{a}^{ik}a_{ik} = 2\,a^{ik}a_{ik} + a^2. \qquad (12)$$

---

1) Reine Infinitesimalgeometrie, Zeitschr. f. Math. 2, 384, 1918. Die beiden genannten Arbeiten werden im Folgenden als I und II, das Buch Raum-Zeit-Materie, Berlin, Springer 1918, desselben Autors als R.Z.M. zitiert.

2) Herr Prof. Weyl hatte die Freundlichkeit mir mitzuteilen, daß er bereits seit längerer Zeit an die Ann. d. Phys. eine Arbeit eingesendet habe, welche sich ebenfalls mit den physikalischen Konsequenzen seiner Theorie beschäftigt und demnächst erscheinen wird. (Anm. bei der Korrektur. Sie ist inzwischen erschienen: Ann. d. Phys. 59, 1919, S. 101.)

3) Näheres darüber im § 2.

4) II, S. 400, Gl. (11). Bezüglich der Vorzeichen ist für hier und das Folgende zu bemerken, daß φ_i in II definitionsgemäß das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie in I. Wir definieren φ so wie es in I geschehen ist.

---

1) II, S. 394, Gl. (5). Auch der Krümmungstensor hat dort definitionsgemäß das entgegengesetzte Vorzeichen wie der hier verwendete. Dieser hat den Vorzug, daß er bei Verschwinden der φ_i ohne Vorzeichenänderung in den gewöhnlichen Riemann-Christoffelschen übergeht. Dieser Unterschied im Vorzeichen ist auch für die folgenden Relationen von Bedeutung.

2) II, S. 403, Gl. (15).

3) II, S. 404.

Ferner ist

$$\Phi_i^k = \frac{\partial \varphi^k}{\partial x_i} + \left\{ {i\,r \atop k} \right\} \varphi^r \qquad (6a)$$

$$\Phi = \Phi_i^i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \varphi^i}{\partial x_i} \qquad (6b)$$

$$\varphi = g^{ik} \varphi_{ik} = -(\varphi_r \varphi^r), \qquad (7a)$$

infolgedessen ist

$$\overline{R}^r_{irk} = \overline{R}_{ik} = R^*_{ik} - \Phi_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} \Phi - - \tfrac{1}{2} \varphi_i \varphi_k + \tfrac{1}{2} g_{ik} (\varphi_r \varphi^r) \qquad (13)$$ [1]

$$\hat{R}^r_{irk} = \hat{R}_{ik} = R^*_{ik} - \hat{\Phi}_{ik} - \tfrac{1}{2} g_{ik} \Phi \text{ [2]} - - \tfrac{1}{2} \varphi_i \varphi_k + \tfrac{1}{2} g_{ik} (\varphi_r \varphi^r), \qquad (14)$$

also zufolge (9a)

$$\overline{R}_{ik} = R_{ik} - \tfrac{1}{2} F_{ik}, \qquad (15)$$

was sich auch direkt aus (8) ergibt. Endlich folgt aus (3)

$$R_{ik} = \overline{R}_{ik} - \tfrac{1}{2} F_{ik} \qquad (16)$$

und

$$R_{ik} = \hat{R}_{ik} - F_{ik}. \qquad (16a)$$

Der Tensor $\hat{R}_{ik}$ ist symmetrisch, nicht aber $\overline{R}_{ik}$ und R_{ik}. Weiter ergibt sich nach (11)

$$g^{ik} R_{ik} = g^{ik} \overline{R}_{ik} = g^{ik} \hat{R}_{ik} = R = R^* - 3\Phi + \tfrac{3}{2} (\varphi_r \varphi^r) \qquad (17)$$ [3]

und nach (8), (12), (15), (16) wegen

$$\hat{R}^{iklm} \tilde{F}_{iklm} = \hat{R}^{iklm} g_{ik} F_{lm} = \tilde{F}^{iklm} g_{ik} F_{lm} = = \hat{R}_{ik} F^{ik} = 0: \qquad (18)$$

$$R_{iklm} R^{iklm} = \hat{R}_{iklm} \hat{R}^{iklm} + \tfrac{3}{2} F_{ik} F^{ik} \qquad (19a)$$

$$\overline{R}_{iklm} \overline{R}^{iklm} = \hat{R}_{iklm} \hat{R}^{iklm} + \tfrac{1}{2} F_{ik} F^{ik} \qquad (19b)$$

$$R_{iklm} R^{iklm} = \overline{R}_{iklm} \overline{R}^{iklm} + F_{ik} F^{ik} \qquad (19c)$$

$$R_{ik} R^{ik} = \hat{R}_{ik} \hat{R}^{ik} + F_{ik} F^{ik} \qquad (20a)$$

$$\overline{R}_{ik} \overline{R}^{ik} = \hat{R}_{ik} \hat{R}^{ik} + \tfrac{1}{4} F_{ik} F^{ik} \qquad (20b)$$

$$R_{ik} R^{ik} = \overline{R}_{ik} \overline{R}^{ik} + \tfrac{3}{4} F_{ik} F^{ik}. \qquad (20c)$$

Wir wollen nunmehr unsere rein formalen Vorbetrachtungen mit der Beantwortung der Frage beenden, ob es in der Weylschen Tensoranalysis Identitäten gibt, welche zu den bekannten Identitäten

$$\frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r} + g^{is} \left\{ {r\,s \atop k} \right\} + g^{sk} \left\{ {r\,s \atop i} \right\} = 0 \qquad (\alpha)$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, R^{*ik}}{\partial x_k} + \left\{ {r\,s \atop i} \right\} R^{*rs} = \tfrac{1}{2} g^{ir} \frac{\partial R^*}{\partial x_r} \qquad (\beta)$$

der gewöhnlichen Tensoranalysis analog sind. Für die spätere Anwendung empfiehlt es sich, in der ersten Identität

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x_r} - g^{ik} \left\{ {r\,s \atop s} \right\} \quad \text{statt} \quad \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_r}$$

zu schreiben. Der nächste Schritt ist naturgemäß der, daß man überall statt der Klammerausdrücke die Γ einführt und den Wert der so modifizierten linken Seite von (α) mittels der Beziehungen (1), (1a) ausrechnet. Auf diese Weise erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x_r} + g^{is} \Gamma^k_{rs} + g^{ks} \Gamma^i_{rs} - - g^{ik} \Gamma^s_{rs} - g^{ik} \varphi_r = 0. \qquad (A)$$

Die linke Seite von (A) ist ein Tensor vom Gewicht -2; denn man überzeugt sich leicht davon, daß (A) gegenüber der Substitution

$$g_{ik} \,|\, \lambda g_{ik}, \quad \varphi_i \,|\, \varphi_i + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x_i} \qquad (\lambda)$$ [1]

sich konvariant verhält. Schwieriger ist die zweite Identität zu behandeln. Auch hier wird man zunächst

$$R^{*ik}, \; R^*, \; \left\{ {r\,s \atop i} \right\}$$

durch

$$R^{ik}, \; R, \; \Gamma^i_{rs}$$

ersetzen. Die linke Seite von (β) liefert dann unmittelbar einen Tensor, nicht so die rechte; doch kann man letztere mittels der Substitution (λ) durch Hinzufügung von $R\varphi_i$ unschwer zu einem Tensor ergänzen. Wir haben also

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g} R^{ik}}{\partial x_R} + \Gamma^i_{rs} R^{rs}$$

und

$$\tfrac{1}{2} \left(g^{ir} \frac{\partial R}{\partial x_r} + R \varphi^i \right)$$

miteinander zu vergleichen. Man könnte nun beide Ausdrücke explizite berechnen. Dies wäre aber langwierig und mühsam. Hier führt ein Prinzip rasch zum Ziel, das wir auch später noch öfters anwenden werden. Sind beide Seiten einer Gleichung Tensoren derselben Art und ist die Gleichung in einem geodätischen Bezugssystem richtig, so besteht sie allgemein zu Recht. Wir unterscheiden hier mit Weyl[2]) zwischen Koordinatensystem und Bezugssystem. Ein geodätisches Bezugssystem ist ein solches, für das im Punkt P, den wir gerade ins Auge fassen, sowohl die ersten Ableitungen der g^{ik} als auch die φ_i (nicht aber deren Ableitungen) verschwinden. Die Anwendung dieses Prinzips auf unseren Fall lehrt nun, daß nicht die obengenannten Tensoren, sondern

---

1) II, S. 404.

2) Aus (9a) ergibt sich

$$g^{ik} \hat{\Phi}_{ik} = g^{ik} \Phi_{ik} = \Phi.$$

3) II, S. 404 und I, S. 477.

---

1) I, S. 470, Gl. (9).

2) II, S. 396.

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\overline{R}^{ik}}{\partial x_k} + \Gamma^i_{rs}\overline{R}^{rs} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\varphi^i\right) \quad \text{(B)}$$

einander gleich sind. Denn die von den φ_i freien Glieder stimmen zufolge (β) überein und die Glieder, welche bloß die Ableitungen der φ_i enthalten sind zufolge (13), (6a) und (17) auf beiden Seiten von (B) gleich

$$-\frac{3}{2} g^{ir}\frac{\partial^2 \varphi^k}{\partial x_r \partial x_k},$$

also identisch, w. z. b. w.

Wenn diese formalen Entwicklungen einen etwas breiten Raum einnehmen, so möge das damit entschuldigt werden, daß bei einer so jungen Theorie wie der von Weyl eben erst die Werkzeuge geschmiedet werden müssen, mit denen die Lösung ihrer Probleme in Angriff genommen werden kann.

§ 2. Weltfunktion und Viererstrom.

Nach Weyl läßt sich alles physikalische Geschehen aus einem Wirkungsprinzip

$$\delta \int W\, d\omega = 0 \quad \text{(I)}$$

ableiten. Die Wirkungsfunktion W ist eine Invariante vom Gewicht -2, so daß das Integral

$$\int W\, d\omega$$

eine absolute Invariante ist. Von fundamentaler Bedeutung sind dabei die fünf Identitäten[1]), die zwischen den Gleichungen bestehen, welche die Naturgesetze ausdrücken:

Ist für Variationen, die an der Grenzfläche des Integrationsgebietes verschwinden,

$$\delta \int W\, d\omega = \int (W_{ik}\,\delta g^{ik} + w_i\,\delta\varphi^i)\, d\omega, \quad (21)$$

so gilt für jede Invariante W der genannten Art

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\, w^i}{\partial x_i} &= W_i^i \\ \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\, W_k^i}{\partial x_i} - \Gamma^s_{kr} W^r_s &= \frac{1}{2} F_{ik} w^i, \end{aligned}\right\} \quad \text{(II)}$$

während

$$W_{ik} = 0, \quad w_i = 0 \quad (22)$$

die aus der Wirkungsfunktion W sich ergebenden Naturgesetze darstellen. Wenn man nun physikalische Konsequenzen aus der Theorie von Weyl ziehen will, muß man vor allem die Frage beantworten, welche Invariante man als Wirkungsfunktion wählen soll. Damit man die Maxwellschen elektromagnetischen Gleichungen erhält, muß sie jedenfalls additiv den Term $\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}$ enthalten. Was aber ist der zweite Teil der Wirkungsfunktion? Weyl wählt die Invariante $R_{iklm}R^{iklm}$. Merkwürdigerweise resultieren aber daraus auch für den Fall der Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes nicht die Einsteinschen Gravitationsgleichungen. Man hat also in diesem Falle gar keine Sicherheit, ob die Perihelbewegung des Merkur richtig aus der Theorie folgt. Dies ist aber sicher der Fall, wenn man eine der Invarianten $R_{ik}R^{ik}$, R^2 (oder eine lineare Kombination beider) als Wirkungsfunktion wählt[1]). Denn man sieht sofort, daß dann (I) immer erfüllt ist, sobald $\varphi_i = 0$ und $R^*_{ik} = 0$ ist. (Freilich ist $R^*_{ik} = 0$ nicht die einzige Lösung der Feldgleichungen bei Abwesenheit eines elektromagnetischen Feldes.) Wenn wir aus diesem Grunde auch geneigt sind, den beiden letztgenannten Invarianten vor der ersteren den Vorzug zu geben, wollen wir dennoch zunächst auch diese unseren Betrachtungen zugrunde legen. Wir haben also (abgesehen vom Term $\frac{1}{4}F_{ik}F^{ik}$) für die Weltfunktion folgende Möglichkeiten:

$$W = R_{iklm}R^{iklm},\ R_{ik}R^{ik},\ R^2\ {}^{2)}. \quad (23)$$

Natürlich ist auch irgendeine lineare Kombination dieser drei Ansätze denkbar. Man überzeugt sich übrigens leicht davon, daß jede Invariante $R_{iklm}R^{i'k'l'm'}$, wo $i'k'l'm'$ irgendeine bestimmte Permutation von $iklm$ bedeutet, infolge der schiefen und zyklischen Symmetrie von R_{iklm} sich linear durch die drei erwähnten und durch $F_{ik}F^{ik}$ ausdrücken läßt. So ist z. B.

$$\begin{aligned} R_{iklm}R^{ilmk} &= \frac{1}{2}R_{iklm}(R^{ilmk} - R^{imlk}) \\ &= \frac{1}{2}R_{iklm}(R^{ilmk} + R^{imkl}) \\ &= -\frac{1}{2}R_{iklm}R^{iklm}. \end{aligned}$$

Schreiben wir nun das Wirkungsprinzip in der Form

$$\delta \int (W + \tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik})\, d\omega = 0 \quad (24)$$

und definieren W_{ik} und s_i durch

$$\delta \int W\, d\omega = \int (W_{ik}\,\delta g^{ik} + s_i\,\delta\varphi^i)\, d\omega, \quad (25)$$

so folgt aus (24):

$$s^i = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\, F^{ik}}{\partial x_k} \quad (26)$$

$$W_{ik} + \tfrac{1}{2}S_{ik} = 0. \quad (27)$$

Hierin bedeutet

$$S_{ik} = F_{ri}F_{sk}g^{rs} - \tfrac{1}{4}F_{rs}F^{rs}g_{ik} \quad (28)$$

den Maxwellschen Spannungstensor. (26) ist nichts anderes als das zweite System der Maxwellschen Gleichungen, s^i ist deshalb der Viererstrom. Zufolge von (25) ist also der

1) I, S. 475, Gl. (17), (18) und II, S. 408—410.

1) In der genannten, demnächst in den Ann. d. Phys. erscheinenden Arbeit werden auch diese Invarianten von Weyl diskutiert.

2) Es ist nicht möglich, aber, wie wir sehen werden, auch nicht nötig, hier noch eine kosmologische Konstante hinzuzufügen.

Viererstrom eine universelle Funktion der Feldkomponenten der Gravitation und der Elektrizität, und zwar ist diese unabhängig von den Maxwellschen Gleichungen. Zum zweitenmal[1]) scheint also die Möglichkeit vorhanden zu sein, die Existenz des Elektrons zu erklären und aus tieferen Gründen zu verstehen.

Wir gehen jetzt unter Zugrundelegung des allgemeinen Ansatzes

$$2\,W = c_1\,\overline{R}_{iklm}\,\overline{R}^{iklm} + c_2\,\overline{R}_{ik}\,\overline{R}^{ik} + c_3\,R^2 \quad (23\text{a})$$

für die Weltfunktion zur expliziten Berechnung des Viererstromes über. Bezeichne δ_0 eine Variation, in der bloß φ_i variiert wird, die g_{ik} also unverändert bleiben, so wird zufolge (5), (13) und (17)

$$\begin{aligned}\delta_0 \int W\,d\omega = \int \{ &- c_1\,\overline{R}^{iklm}\,\delta_0\,\overline{\Phi}_{iklm} - \\ &- \tfrac{1}{2}\,c_1\,\overline{R}^{iklm}\,\delta_0\,\tilde{\varphi}_{iklm} - c_2\,\overline{R}^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} - \\ &- \frac{c_2}{2}\,R\,\delta_0\Phi - c_2\,\hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\varphi_i + c_2\,R\,\varphi^i\,\delta\varphi_i - \\ &- 3\,c_3\,R\,\delta_0\,\Phi + 3\,c_3\,R\,\varphi^i\,\delta\,\varphi_i \}\,d\omega = \\ = \int \{ &- (2\,c_1 + c_2)\,(\overline{R}^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} + \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\,\varphi_i) - \\ &- \left(\frac{c_2}{2} + 3\,c_3\right) R\,\delta_0\,\Phi + (c_1 + c_2 + 3\,c_3) \\ &R\,\varphi^i\,\delta\,\varphi_i \}\,d\omega.\end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}-\int (\overline{R}^{ik}\,\delta_0\,\Phi_{ik} + \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\,\delta\varphi_i)\,d\omega = \\ = \int \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\overline{R}^{ik}}{\partial x_k} + \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} \hat{R}^{rs} - \hat{R}^{ir}\,\varphi_r\right) \cdot \\ \cdot\,\delta\varphi_i\,d\omega = \int \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial \sqrt{g\,\overline{R}^{ik}}}{\partial x_k} + \right. \\ \left. + \Gamma^i_{rs}\,\hat{R}^{rs} - \tfrac{1}{2}\,R\,\varphi^i\right)\delta\varphi_i\,d\omega\end{aligned}$$

und

$$-\int R\,\delta_0\,\Phi\,d\omega = \int g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r}\,\delta\varphi_i\,d\omega,$$

also wird endlich mit Rücksicht auf (B):

$$\begin{aligned}&\delta_0 \int W\,d\omega = \\ &= \int (c_1 + c_2 + 3c_3)\left(g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\varphi^i\right)\delta\varphi_i\,d\omega.\end{aligned}$$

Setzen wir noch

$$s^i = (c_1 + c_2 + 3c_3)\,\overline{s}^i, \quad (29)$$

so erhalten wir als Endresultat

$$\overline{s}^i = g^{ir}\frac{\partial R}{\partial x_r} + R\varphi^i, \quad \overline{s}_i = \frac{\partial R}{\partial x_i} + R\varphi_i\,{}^{1)}. \quad (30)$$

Aus diesen Ergebnissen lassen sich sehr wichtige Folgerungen für statische Felder ziehen. Hier sind alle Feldgrößen von der Zeit unabhängig und außerdem ist

$$\varphi_i = 0, \quad g_{i0} = 0\,{}^{2)}.$$

Durch diese Bedingungen ist der Maßstab eindeutig festgelegt. Denn ist $\overline{g}_{ik}$, $\overline{\varphi}_i$ ein zweites statisches Feld, daß aus dem ursprünglich gegebenen durch eine Substitution (λ) hervorgeht, so folgt zunächst aus

$$\overline{g}_{ik} = \lambda\,g_{ik},$$

daß λ von der Zeit unabhängig sein muß, und dann aus

$$\overline{\varphi}_i = \varphi_i + \frac{1}{\lambda}\frac{\partial \lambda}{\partial x_i}$$

wegen

$$\varphi_i = \overline{\varphi}_i = 0,$$

daß

$$\frac{\partial \lambda}{\partial x_i} = 0, \quad \lambda = \text{konst.}$$

ist. Aus (26) ergibt sich sofort, daß auch $s_i = 0$ und bloß s_0 im statischen Feld von null verschieden ist. Das ist aber nach (30) nur möglich, wenn

$$R = \text{konst.}\,{}^{1)} \quad (31)$$

ist. (31) stellt eine fundamentale Bedingung für ein statisches Feld dar. Sie gilt unabhängig davon, ob ein elektrisches Feld vorhanden ist oder nicht und ist nicht durch geeignete Wahl des Maßstabes erfüllbar, da ja dieser bereits festgelegt ist. Wenn irgendwo auf der Welt Materie, also auch eine elektrische Ladung vorhanden ist, so kann R nicht null sein, denn daraus würde nach (30) $s_0 = 0$ folgen. Man wird wohl erwartet haben, daß in hinreichend großer Entfernung von aller Materie die euklidische Geometrie gilt. Wir sehen aber, daß dies nicht der Fall ist; denn R verschwindet auch dort nicht, was nur dann einen physikalischen Sinn hat, wenn die Welt geschlossen ist. So werden wir hier auf die natürlichste

1) Der erste Versuch in dieser Richtung ist die Theorie von Mie. Die Theorie von Weyl unterscheidet sich von dieser außer durch viele andere Umstände dadurch, daß hier das Viererpotential keine absolute Bedeutung hat (Maßstabinvarianz!) und daß in dem Ausdruck für den Viererstrom nicht nur die g_{ik}, sondern auch deren erste und zweite Ableitungen eingehen, was im vollen Einklang steht mit der postulierten Union zwischen Gravitation und Elektrizität.

1) Für den speziellen Fall $c_2 = c_3 = 0$, sind die Beziehungen (30) und (31) schon in I, S. 477 angegeben, allerdings ohne Herleitung.

2) Wenn von statischen Feldern die Rede ist, sollen die Indizes immer nur die Ziffern 1, 2, 3 durchlaufen. Die Zeitkomponenten bezeichnen wir wie üblich mit dem Index 0. Zuweilen werden wir auch einfach φ statt φ_0 schreiben. Die Bedingung $\varphi_i = 0$ bedeutet, daß kein magnetisches, sondern nur ein elektrostatisches Feld vorhanden ist, während $s_i = 0$ bedeutet, daß die Stromstärke gleich null ist, also alle Ladungen ruhen.

Weise zu derselben Forderung gedrängt, die schon Einstein aus der Tatsache erschlossen hat, daß die Fixsterne nicht ins Unendliche auseinander fliehen, sondern einen endlichen Raum erfüllend im statistischen Gleichgewichtszustand verharren. Während aber die Einsteinsche Gravitationstheorie, um das zu erklären, zu einer neuen Hypothese, dem kosmologischen λ-Glied, Zuflucht nehmen muß, ergibt sich hier dasselbe ganz ungezwungen und von selbst[1]).

Infolge von (30) und (31) wird die Ladungsdichte im statischen Feld einfach proportional zu φ, was immerhin sehr auffallend ist. Jedoch spricht das nicht gegen den zugrunde gelegten Ansatz für die Wirkungsfunktion. Infolge des jedenfalls sehr kleinen Proportionalitätsfaktors R wird nämlich s_0 nur dort merklich, wo das Potential sehr groß ist, das ist in unmittelbarer Umgebung des Zentrums, und hier nimmt auch das Potential viel rascher mit der Distanz vom Zentrum ab als $\frac{1}{r}$.

Von entscheidender Bedeutung für die Theorie von Weyl scheint mir aber der folgende Umstand zu sein: Die Differentialgleichungen für das statische Feld sind symmetrisch in bezug auf positive und negative Elektrizität. Mit anderen Worten: Ist φ, g_{ik}, g_{00} eine Lösung, so ist $-\varphi$, g_{ik}, g_{00} ebenfalls eine Lösung. Der Beweis dieser Behauptung gründet sich einfach auf den Umstand, daß die Feldgleichungen gegenüber der Koordinatentransformation $x_0' = -x_0$ kovariant sein müssen[2]) und daß in statischen Feldern dabei φ in $-\varphi$ übergeht, während g_{ik} und g_{00} unverändert bleiben. Der eben bewiesene Satz ist für jede invariante Weltfunktion richtig, z. B. auch dann, wenn sie keine rationale Funktion der Feldgrößen φ_i und g_{ik} ist, falls sie nur invariant ist gegenüber der Koordinatentransformation $x_0' = -x_0$. Solange also kein ganz neues Prinzip in die Theorie Eingang findet, kann man niemals hoffen, eine Erklärung für die große Verschiedenheit der Massen der Atomkerne und des Elektrons zu finden.

Auf das Problem des Elektrons soll in einem späteren Abschnitt näher eingegangen werden. Vorerst müssen wir noch die Feldgleichungen der Gravitation ermitteln.

§ 3. Die Feldgleichungen der Gravitation.

Zunächst können wir statt

$$\delta\int\left\{\tfrac{1}{2}(c_1 \overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} + c_2 \overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} + c_3 R^2) + \tfrac{1}{4} F_{ik}F^{ik}\right\} d\omega = 0$$

mit Rücksicht auf (19b) und (20b) auch schreiben

$$\delta\int\left\{k_1 \hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + k_2 \hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + k_3\cdot\tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{4} F_{ik}F^{ik}\right\} d\omega = 0,$$

wenn

$$k_1 = \frac{c_1}{2\left(c_1 + \frac{c_2}{2} + 1\right)}, \quad k_2 = \frac{c_2}{2\left(c_1 + \frac{c_2}{2} + 1\right)}$$
$$k_3 = \frac{c_3}{c_1 + \frac{c_2}{2} + 1} \tag{32}$$

gesetzt wird. In (24) ist also für W

$$W = k_1 \hat{R}_{iklm}\hat{R}^{iklm} + k_2 \hat{R}_{ik}\hat{R}^{ik} + k_3\cdot\tfrac{1}{2}R^2 \tag{33}$$

einzusetzen, die Gravitationsgleichungen sind durch (27) gegeben und wir haben W_{ik} zu berechnen. δ_1 bezeichne eine Variation, bei der nur die g_{ik}, nicht die φ_i variiert werden. Dann ist

$$\delta_1\int W\,d\omega = \int\left\{k_1(\hat{R}_i^{\ klm}\delta_1\hat{R}^i_{\ klm} + \hat{R}^i_{\ klm}\delta_1\hat{R}_i^{\ klm}) + k_2(\hat{R}^{ik}\delta_1\hat{R}_{ik} + R_{ik}\delta_1\hat{R}^{ik}) + k_3 R\,\delta R - \tfrac{1}{2}W g_{ik}\,\delta g^{ik}\right\} d\omega \tag{34}$$

$$\dot{R}^i_{\ klm}\delta_1\hat{R}_i^{\ klm} = \dot{R}^i_{\ klm}\delta_1(\hat{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} g_{\varrho i} g^{\mu k} g^{\sigma l} g^{\nu m}) = R_\varrho^{\mu\sigma\nu}\delta_1\dot{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} + \dot{R}^i_{\ klm}(-g_{i\sigma}\hat{R}_\varrho^{klm}\,\delta g^{\varrho\sigma} + \dot{R}_i^{\nu lm} g_{\mu\nu}\,\delta g^{\mu k} + \hat{R}^{k\nu m} g_{\nu\sigma}\,\delta g^{\sigma l} + \dot{R}_i^{kl\mu} g_{\mu\nu}\,\delta g^{\nu m}) = \hat{R}_\varrho^{\mu\sigma\nu}\delta_1(\dot{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} + g_{i\sigma}(-\dot{R}^\sigma_{\varrho lm}\hat{R}_k^{\varrho lm} + \dot{R}^\mu_{klm}\hat{R}_\mu^{\sigma lm} + \dot{R}^\nu_{lkm}\hat{R}_\nu^{l\sigma m} + \dot{R}^\nu_{mlk}\hat{R}_\nu^{ml\sigma})\,\delta g^{ik}.$$

Nun ist

$$g_{i\sigma}\dot{R}^\sigma_{\varrho lm}\hat{R}_k^{\varrho lm}\,\delta g^{ik} = R_{k\varrho lm}\hat{R}_i^{\varrho lm}\,\delta g^{ik} = g_{i\sigma}R_{k\varrho lm}\hat{R}^{\sigma\varrho lm}\,\delta g^{ik},$$

also wird schließlich infolge der Symmetrieeigenschaften von R_{iklm}:

$$\dot{R}^i_{klm}\delta_1\dot{R}_i^{klm} = \hat{R}_\varrho^{\mu\sigma\nu}\delta_1\dot{R}^\varrho_{\mu\sigma\nu} + 2 g_{i\varrho}\hat{R}^{\varrho\mu\sigma\nu}\hat{R}_{k\mu\sigma\nu}\,\delta g^{ik}$$

oder

---

1) Anmerkung bei der Korrektur. In einer kürzlich erschienenen Arbeit Einsteins („Spielen Gravitationsfelder im Aufbau der materiellen Elementarteilchen eine wesentliche Rolle?" Berl. Ber. 1919, S. 349) ist diese Schwierigkeit auf ähnliche Weise aus dem Wege geräumt wie in der Theorie von Weyl. Auch die dort aufgestellten Gravitationsgleichungen haben einen ähnlichen Bau wie diejenigen, welche sich auf Grund einer speziellen Wahl der Weltfunktion aus der Theorie von Weyl ergeben (§ 4). Nur fehlt bei Einstein der Ausdruck für den Viererstrom, so daß er im statischen Feld eine Gleichung zu wenig erhält.

2) Auf den Zusammenhang zwischen der Symmetrie der Feldgleichungen in bezug auf beide Elektrizitätsarten im statischen Fall mit der Umkehrbarkeit der Zeit wurde ich durch Herrn Prof. Weyl brieflich aufmerksam gemacht.

$$\hat{R}^{i}_{klm}\delta_1 \hat{R}^{klm}_{i} = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\delta_1 \hat{R}^{\sigma}_{\mu\sigma\nu} + \\ + 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{i}\hat{R}_{k\mu\sigma\nu}\,\delta g^{ik}$$

und ebenso erhält man

$$\hat{R}_{ik}\,\delta_1 \hat{R}^{ik} = \hat{R}_{ik}\,\delta_1 (g^{\mu i} g^{\nu k}\hat{R}_{\mu\nu}) = \\ = \hat{R}^{\mu\nu}\,\delta_1 \hat{R}_{\mu\nu} + 2 R^{r}_{i} R_{rk}\,\delta g_{ik},$$

so daß sich schließlich ergibt

$$\delta_1 \int W\,d\omega = \int \{ k_1 [2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\delta_1 R^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} + \\ + (2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{i}\,\hat{R}_{k\mu\sigma\nu} - \tfrac{1}{2}\hat{R}_{\varrho\mu\sigma\nu}\hat{R}^{\varrho\mu\sigma\nu} g_{ik})\,\delta g^{ik}] + \\ + k_2 [2\,\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1 \hat{R}_{\mu\nu} + (2\,\hat{R}^{r}_{i}\hat{R}_{rk} - \\ - \tfrac{1}{2}\hat{R}^{\mu\nu}\hat{R}_{\mu\nu} g_{ik})\,\delta g^{ik}] + k_3 [R\, g^{\mu\nu}\,\delta_1 \hat{R}_{\mu\nu} + \\ + R(\hat{R}_{ik} - \tfrac{1}{4} R g_{ik})\,\delta g^{ik}] \}\, d\omega. \qquad (35)$$

Nach (8) ist aber

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\delta_1 \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho} = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 R^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} + \\ + \tfrac{1}{2}\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 \bar{F}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu}$$

und es ist

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 \bar{F}^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 (g_{\mu\nu}F^{\varrho}_{\sigma}) = \\ = F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta (g_{\mu\nu} g^{\varrho\tau}) = F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^{\tau\mu\sigma\nu}\,\delta g_{\mu\nu} + \\ + F_{\sigma\tau}\,\hat{R}^{\sigma}_{\varrho}\,\delta g^{\varrho\tau};$$

der erste Term verschwindet aber, weil

$$\hat{R}^{\tau\mu\sigma\nu}\,\delta g_{\mu\nu} = \hat{R}^{\sigma\nu\tau\mu}\,\delta g_{\mu\nu} = \hat{R}^{\sigma\mu\tau\nu}\,\delta g_{\mu\nu}$$

in σ und τ symmetrisch ist, so daß wird

$$\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\delta_1 \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho} = \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 R^{\varrho}_{\mu\sigma\nu} + \tfrac{1}{4}(F_{ri}\hat{R}^{r}_{k} + \\ + F_{rk}\,\hat{R}^{r}_{i})\,\delta g^{ik}. \qquad (35a)$$

Weiter haben wir

$$\int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 R^{\varrho}_{\mu\sigma\nu}\,d\omega = \int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\cdot \\ \cdot\delta_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^{\varrho}_{\mu\sigma} - \frac{\partial}{\partial x_\sigma}\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\varrho}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\sigma} - \Gamma^{\varrho}_{\tau\sigma}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} \right\} d\omega = \\ = \int 4 \left\{ \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}}{\partial x_\sigma} + \hat{R}^{\tau\sigma\nu}_{\varrho}\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} - \\ - \hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\tau}\Gamma^{\tau}_{\varrho\sigma} \right\} \delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\,d\omega.$$

Man weist leicht nach, daß

$$K^{\mu\nu}_{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,(\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho} + \hat{R}^{\nu\sigma\mu}_{\varrho})}{\partial x_\sigma} + \hat{R}^{\tau\sigma\nu}_{\varrho}\Gamma^{\mu}_{\tau\sigma} + \\ + \hat{R}^{\tau\sigma\mu}_{\varrho}\Gamma^{\nu}_{\tau\sigma} - (\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\tau} + \hat{R}^{\nu\sigma\mu}_{\tau})\Gamma^{\tau}_{\varrho\sigma} \qquad (36)$$

ein Tensor (und zwar vom Gewicht —2) ist. Zur weiteren Behandlung der Beziehung

$$\int 2\,\hat{R}^{\mu\sigma\nu}_{\varrho}\,\delta_1 R^{\varrho}_{\mu\sigma\nu}\,d\omega = \int K^{\mu\nu}_{\varrho}\cdot 2\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\,d\omega \qquad (37)$$

führen wir dem in § 1 verwendeten Prinzip gemäß provisorisch ein geodätisches Bezugssystem ein. Dann wird

$$2\,\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = 2\,\delta \begin{Bmatrix} \mu\nu \\ \varrho \end{Bmatrix} = - g_{i\mu}\,\delta \frac{\partial g^{i\varrho}}{\partial x_\nu} - \\ - g_{i\nu}\,\delta \frac{\partial g^{i\varrho}}{\partial x^{\mu}} + g_{i\mu} g_{k\nu}\,\delta \frac{\partial g^{ik}}{\partial x_\sigma} g^{\varrho\sigma}$$

und

$$\int K^{\mu\nu}_{\varrho}\cdot 2\,\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = \int \Big(g_{i\mu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_{k}}{\partial x_\nu} + g_{k\nu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_{i}}{\partial x_\mu} - \\ - g_{i\mu} g_{k\nu}\frac{\partial K^{\mu\nu}_{\varrho}}{\partial x_\sigma} g^{\varrho\sigma} \Big)\,\delta g^{ik}\,d\omega.$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Bezugssystem ist $\frac{\partial K^{\mu\nu}_{\varrho}}{\partial x_\sigma}$ zu ersetzen durch den Tensor (vom Gewicht —2):

$$L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,K^{\mu\nu}_{\varrho}}{\partial x_\sigma} + K^{\tau\nu}_{\varrho}\Gamma^{\mu}_{\sigma\tau} + \\ + K^{\tau\mu}_{\varrho}\Gamma^{\nu}_{\sigma\tau} - K^{\mu\nu}_{\varrho}\Gamma^{\tau}_{\sigma\tau} \qquad (38)$$

und es wird

$$\int K^{\mu\nu}_{\varrho}\cdot 2\,\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = \int (g_{i\mu} L^{\mu\nu}_{k\nu} + g_{k\mu} L^{\mu\nu}_{i\nu} - \\ - g_{i\mu}\, g_{k\nu}\, L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma})\,\delta g^{ik}\,d\omega, \qquad (39a)$$

oder wenn wir setzen

$$g_{i\mu} g_{k\nu} L^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = L_{ik,\,\varrho\sigma} \qquad (40)$$

$$\int K^{\mu\nu}_{\varrho}\cdot 2\,\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = \int (L_{i\varrho,\,k\sigma} + L_{k\varrho,\,i\sigma} - \\ - L_{ik,\,\varrho\sigma})\, g^{\varrho\sigma}\,\delta g^{ik}\,d\omega. \qquad (39b)$$

Genau analog gestaltet sich die Berechnung von $\int 2\,\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1 \hat{R}_{\mu\nu}\,d\omega$:

$$\int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1 \hat{R}_{\mu\nu}\,d\omega = \int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1 R_{\mu\nu}\,d\omega = \\ = \int 2\hat{R}^{\mu\nu}\delta_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\nu}\Gamma^{\varrho}_{\mu\varrho} - \frac{\partial}{\partial x_\varrho}\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\sigma}_{\mu\varrho}\Gamma^{\varrho}_{\nu\sigma} - \\ - \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}\Gamma^{\sigma}_{\varrho\sigma} \right\} d\omega = \int \Big\{ \Big[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \hat{R}^{\mu\sigma}\Gamma^{\nu}_{\varrho\sigma} + \\ + \hat{R}^{\nu\sigma}\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} - \hat{R}^{\mu\nu}\,\Gamma^{\sigma\sigma}_{\varrho} \Big]\, 2\,\delta_1 \Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} \\ - \Big[\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + \\ + \hat{R}^{\varrho\sigma}\Gamma^{\mu}_{\varrho\sigma} \Big]\, 2\,\delta_1 \Gamma^{\tau}_{\mu\tau} \Big\}\, d\omega.$$

Die zweite eckige Klammer ist nach (B) gleich $\frac{1}{2}\bar{s}^{\mu}$ und

$$\int \bar{s}^{\mu}\delta_1 \Gamma^{\tau}_{\mu\tau}\,d\omega = \int \bar{s}^{\mu}\,\delta \begin{Bmatrix} \mu\tau \\ \tau \end{Bmatrix} d\omega = \\ = \int \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{s}^{\mu}}{\partial x_\mu}\,\tfrac{1}{2} g_{ik}\,\delta g^{ik}\,d\omega.$$

Infolge der ersten Identität (II) muß aber

$$\frac{1}{\bar{g}}\frac{\partial \sqrt{g}\,\bar{s}^{\mu}}{\partial x_\mu} = 0$$

eine direkte Folge der Gravitationsgleichungen sein, so daß man diesen Term streichen kann.

Definieren wir wieder

$$M_\varrho^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, \hat{R}^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \hat{R}^{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\varrho\sigma} + \\ + \hat{R}^{\nu\varrho} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} - \hat{R}^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\varrho\sigma}, \tag{41}$$

so wird also

$$\int 2\, \hat{R}^{\mu\nu} \delta_1 \hat{R}_{\mu\nu}\, d\omega = \int M_\varrho^{\mu\nu}\, 2\delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, d\omega. \tag{42}$$

Daraus folgt wie früher, wenn wir setzen

$$N_{\varrho\sigma}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, M_\varrho^{\mu\nu}}{\partial x_\sigma} + M_\varrho^{\nu\tau} \Gamma^\mu_{\sigma\tau} + \\ + M_\varrho^{\mu\tau} \Gamma^\nu_{\sigma\tau} - M_\sigma^{\mu\nu} \Gamma^\tau_{\sigma\tau}, \tag{43}$$

$$\int M_\varrho^{\mu\nu} \cdot 2\delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, d\omega = \int (g_{i\mu} N^{\mu\nu}_{k\nu} + g_{k\mu} N^{\mu\nu}_{i\nu} - \\ - g_{i\mu}\, g_{k\nu}\, N^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} g^{\varrho\sigma})\, \delta g^{ik}\, d\omega \tag{44a}$$

und wenn wir noch setzen

$$g_{i\mu} g_{k\nu} N^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} = N_{ik,\,\varrho\sigma}, \tag{45}$$

$$\int M_\varrho^{\mu\nu} \cdot 2\, \delta\, \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, d\omega = \int (N_{i\varrho,k\sigma} + N_{k\varrho,\,i\sigma} - \\ - N_{ik,\,\varrho\sigma})\, g^{\varrho\sigma} \delta g^{ik}\, d\omega. \tag{44b}$$

Nunmehr bleibt uns noch

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 \hat{R}_{\mu\nu}\, d\omega = \int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu}\, d\omega$$

zu berechnen übrig. Zunächst finden wir

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu}\, d\omega = \int \Big\{ \Big[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, R g^{\mu\nu}}{\partial x_\varrho} + \\ + R g^{\mu\sigma} \Gamma^\nu_{\varrho\sigma} + R g^{\nu\sigma} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} - R g^{\mu\nu} \Gamma^\sigma_{\varrho\sigma} \Big\} \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \\ - \Big[\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, R g^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} + R g^{\varrho\sigma} \Gamma^\mu_{\varrho\sigma} \Big] \delta_1 \Gamma^\tau_{\mu\tau} \Big\}\, d\omega$$

oder mit Benutzung von (A) und der daraus durch Verjüngung folgenden Beziehung

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x_k} + g^{rs} \Gamma^i_{rs} - \varphi^i = 0$$

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu}\, d\omega = \int (g^{\mu\nu}\, \bar{s}_\varrho\, \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu} - \\ - \bar{s}^\mu\, \delta_1 \Gamma^\tau_{\mu\tau})\, d\omega. \tag{46}$$

Der zweite Term kann wieder gestrichen werden. Der erste liefert in einem geodätischen Bezugssystem

$$\int g^{\mu\nu}\, \bar{s}_\varrho \delta_1 \Gamma^\varrho_{\mu\nu}\, d\omega = - \\ \int \frac{\bar{s}_i}{\sqrt{g}} \delta \frac{\partial \sqrt{g}\, g^{ik}}{\partial x_k}\, d\omega = \int \frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} \delta g^{ik}\, d\omega = \\ = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \right) \delta g^{ik}\, d\omega.$$

Beim Übergang zu einem beliebigen Bezugssystem ist

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \right)$$

zu ersetzen durch

$$\bar{s}_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{s}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial \bar{s}_k}{\partial x_i} \right) - \Gamma^r_{ik} \bar{s}_r + \tfrac{1}{2} (\bar{s}_i \varphi_k + \bar{s}_k \varphi_i). \tag{47}$$

(Man beachte, daß $\bar{s}_i$ vom Gewicht -1 ist.) Schließlich erhalten wir also

$$\int R g^{\mu\nu} \delta_1 R_{\mu\nu}\, d\omega = \int \bar{s}_{ik}\, \delta g^{ik}\, d\omega. \tag{48}$$

Fassen wir nun alle unsere Ergebnisse zusammen, so finden wir

$$W_{ik} = k_1 [(L_{i\varrho,\,k\sigma} + L_{k\varrho,\,i\sigma} - L_{ik,\,\varrho\sigma})\, g^{\varrho\sigma} + \\ + \tfrac{1}{2} (F_{ri} \hat{R}^r_k + F_{rk} \hat{R}^r_i) + 2\, \hat{R}_i^{\mu\sigma\nu} R_{k\mu\sigma\nu} - \\ - \tfrac{1}{2} R_{\varrho\mu\sigma\nu} \hat{R}^{\varrho\mu\sigma\nu} g_{ik}] + k_2 [(N_{i\varrho,\,k\sigma} + N_{k\varrho,\,i\sigma} - \\ - N_{ik,\,\varrho\sigma})\, g^{\varrho\sigma} + 2\, \hat{R}^r_i \hat{R}_{rk} - \tfrac{1}{2} \hat{R}_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{ik}] + \\ + k_3 [\bar{s}_{ik} + R (R_{ik} - \tfrac{1}{4} R g_{ik})]. \tag{49}$$

$L_{i\varrho,\,k\sigma}$, $N_{i\varrho,\,k\sigma}$ und $\bar{s}_{ik}$ sind definiert durch (36), (38), (40), (41), (43), (45) und (47). Die Gravitationsgleichungen sind dann, wie bereits erwähnt

$$W_{ik} + \tfrac{1}{2} S_{ik} = 0. \tag{27}$$

§ 4. Statische, zentrisch-symmetrische Felder.

Das Problem des Elektrons.

Nunmehr können wir die früher (§ 2) bereits gestreifte Frage der statischen Felder etwas eingehender diskutieren. Zwei Arten von statischen Feldern sind es, die ein besonderes physikalisches Interesse haben. Das materie- und elektrizitätsfreie Feld und das Feld des Elektrons. Es wären also erstens diejenigen Lösungen der Feldgleichungen zu ermitteln, für die $\varphi = 0$ ist und zweitens diejenigen partikulären Lösungen, welche nirgends eine Singularität haben, ohne daß φ und R identisch verschwinden. Wir wollen uns hier jedoch fast ausschließlich mit dem zweiten Problem befassen. Bezüglich des ersten bemerken wir nur, daß die vierdimensional-geschlossene Welt von konstanter Krümmung[1]) eine Lösung der Feldgleichungen (49) ist. Denn für diese ist

$$R_{iklm} = k (g_{il} g_{km} - g_{kl} g_{im}), \\ R_{ik} = 3 k g_{ik}, \quad R = 12\, k = \text{konst.}$$

und infolgedessen

$$K_\varrho^{\mu\nu} = M_\varrho^{\mu\nu} = 0, \quad R_i^{\mu\sigma\nu} R_{k\mu\sigma\nu} = \tfrac{1}{4} R_{\varrho\mu\sigma\nu} R^{\varrho\mu\sigma\nu} g_{ik}, \\ R^i_r R_{rk} = \tfrac{1}{4} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} g_{ik},$$

woraus $W_{ik} = 0$ folgt.

Bevor wir die Differentialgleichungen des Elektronproblems aufstellen, müssen wir noch untersuchen, ob nicht infolge des Hinzutretens der Bedingung $R =$ konst. zu den Feldgesetzen mehr Gleichungen zu erfüllen sind als der Zahl der Variablen entspricht. Infolge des Bestehens

1) Die Geometrie einer derartigen Welt, die entweder sphärisch oder elliptisch sein kann, ist eingehend von F. Klein in seiner Arbeit: „Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich geschlossenen Welt", Gött. Nachr. 1918, S. 394 erörtert worden.

der Identitäten (II, S. 460) ist dies jedoch nicht der Fall. Denn aus der ersten dieser Identitäten ergibt sich, daß aus der elektromagnetischen Grundgleichung und aus $R = \text{konst.}$

$$W_i^i = 0$$

folgt und die zweite liefert drei Identitäten ($k = 1, 2, 3$) zwischen den Gravitationsgleichungen, welche den nötigen Spielraum für die Wahl des räumlichen Koordinatensystems verschaffen. Komplizierter werden jedoch die Verhältnisse dadurch, daß W_{i0}[1]) im allgemeinen auch im statischen Fall bei Anwesenheit eines elektrischen Feldes nicht verschwindet. Die Gleichungen $W_{i0} = 0$ sind dann in der Tat überzählig, da (II) (für $k = 0$)[2]) zwischen ihnen bloß die Relation

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}\, W_0^i}{\partial x_i} = 0$$

liefert.

Es scheint also, daß nur bei solchen Ansätzen für die Wirkungsfunktion ein statisches Feld bei Vorhandensein von Elektrizität möglich ist, bei denen im statischen Fall W_{i0} identisch verschwindet. Beim allgemeinen Ansatz (33) ist diese Bedingung nicht erfüllt, wohl aber im speziellen Fall

$$c_1 = c_2 = 0\text{[3]}).$$

Wir wollen uns auf diesen beschränken, weil hier die Verhältnisse am einfachsten liegen. Nach (32) ist hier auch

$$k_1 = k_2 = 0, \quad k_3 = c_3$$

und wenn wir den Index bei der Konstanten weglassen, nimmt das Wirkungsprinzip (33) in unserem Spezialfall die Form an[4])

$$\delta \int \left(c \cdot \tfrac{1}{2} R^2 + \tfrac{1}{4} F_{ik} F^{ik}\right) d\omega = 0. \tag{50}$$

Wegen $R = \text{konst.}$ ist ferner

$$\overline{S}_{ik} = R[\Phi_{ik} + 2\varphi_i \varphi_k - \tfrac{1}{2} g_{ik} (\varphi_r \varphi^r)], \tag{51}$$

also wird W_{ik} gemäß (49), wenn wir noch für R_{ik} seinen Wert (14) einsetzen

$$W_{ik} = c\, R(R^*_{ik} + \tfrac{3}{2} \varphi_i \varphi_k - \tfrac{1}{4} g_{ik} R)\text{[4]}). \tag{52}$$

W_{i0} verschwindet hier also in der Tat identisch. Nun führen wir die Bedingung der zentrischen Symmetrie ein. Die metrische Fundamentalform läßt sich dann immer auf die Form bringen[1])

$$ds^2 = f^2 dt^2 - d\sigma^2, \quad d\sigma^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2, \tag{53}$$

worin f und l allein von

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

abhängen. Infolgedessen wird dann

$$g_{i0} = 0, \quad g_{00} = f^2, \quad g^{00} = \frac{1}{f^2}, \qquad g_{ik} = -(\delta_i^k + l x_i x_k). \tag{54}$$

Oft ist es praktisch, die Werte der Komponenten eines Tensors A_{ik} bloß für den Punkt

$$P(x_1 = r, \; x_2 = x_3 = 0)$$

zu verwenden; wir wollen diese dann mit $[A_{ik}]$ bezeichnen[2]). So ist z. B.

$$[g_{11}] = -h^2, \quad [g_{22}] = [g_{33}] = -1, \tag{54a}$$

die übrigen

$$[g_{ik}] = 0$$

wenn

$$h^2 = 1 + l r^2 \tag{55}$$

gesetzt wird. Daraus folgt unmittelbar

$$[g^{11}] = -\frac{1}{h^2}, \quad [g^{22}] = [g^{33}] = -1, \tag{54b}$$

die übrigen

$$[g^{ik}] = 0.$$

Ferner wird

$$\Delta = \sqrt{-g} = h f, \tag{56}$$

und

$$F_{0i} = \varphi' \cdot \frac{x_i}{r}, \quad F^{0i} = -\frac{\varphi'}{\Delta^2} \frac{x_i}{r}, \quad S_0^0 = -\frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\Delta^2},$$
$$[S_1^1] = -\frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\Delta^2}, \quad [S_2^2] = [S_3^3] = +\frac{1}{2} \frac{\varphi'^2}{\Delta^2}, \tag{57}$$

---

1) Über die Indexbezeichnung, vgl. Fußnote 2, S. 461; es ist zu beachten, daß $S_{i0} \equiv 0$ im statischen Feld.

2) Für $k = 1, 2, 3$ fallen die Glieder, welche W_{i0} enthalten, heraus.

3) Nach Weyl (II, S. 404) enthält der Tensor

$$P_{iklm} = \hat{R}_{iklm} - \frac{1}{2}(g_{il} \hat{R}_{km} + g_{km} \hat{R}_{il} - g_{im} \hat{R}_{kl} - g_{kl} R_{im}) + \frac{1}{6}(g_{il} g_{km} - g_{im} g_{kl}) R$$

die φ_i gar nicht mehr. Daher ist auch für

$$W = k P_{iklm} P^{iklm} + k_3 \frac{1}{2} R^2 \tag{a}$$

im statischen Feld $W_{i0} \equiv 0$. Umgekehrt läßt sich jeder in (33) enthaltene, spezielle Ansatz für W, welcher der Bedingung $W_{i0} \equiv 0$ im statischen Feld genügt, auf die Form (a) bringen.

4) Anmerkung bei der Korrektur. Um unsere Bezeichnungen mit denen der bereits mehrfach zitierten, nunmehr erschienenen Annalenarbeit Weyls in Einklang zu bringen, hat man R^*_{ik}, R^*, R, c, $\frac{1}{2cR}$, S_{ik} zu ersetzen durch R_{ik}, R, $-F = \alpha$, $\frac{1}{2\beta}$, $-\lambda$, $-S^*_{ik}$. Vgl. auch Fußnote 4, S. 458.

1) Vgl. R. Z. M., 1. Aufl., Kap. IV, §§ 29 und 30.

2) Die Werte der A_{ik} in einem beliebigen Punkte ergeben sich daraus nach der Formel

$$A_{ik} = [A_{22}]\, \delta_i^k + ([A_{11}] - [A_{22}]) \frac{x_i x_k}{r^2},$$

so folgt z. B. aus (54b)

$$g^{ik} = -\left(\delta_i^k - \frac{l}{h^2} x_i x_k\right);$$

man verifiziert unmittelbar die Relationen

$$g^{i\alpha} g_{k\alpha} = \delta^i_k.$$

endlich berechnet man noch auf Grund bekannter Formeln, wenn man die Bezeichnung

$$w = -\frac{l r^3}{h^2} = \left(\frac{1}{h^2} - 1\right) r \tag{58}$$

einführt:

$$R^*{}_0{}^0 = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f' r^2}{h},$$

$$[R^*{}_1{}^1] = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f' r^2}{h} + \frac{2}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta},$$

$$[R^*{}_2{}^2] = [R^*{}_3{}^3] = -\frac{\Delta'}{r h^2 \Delta} - \frac{w'}{r^2}. \tag{59}$$

Gemäß (26), (27), (29) und (30) lauten demnach die Feldgleichungen der Gravitation und der Elektrizität (erstere schreiben wir in der gemischten Form

$$W_i^k + \frac{1}{2} S_i^k = 0\Big):$$

$$3 c R \cdot \frac{\varphi}{f^2} = -\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2 \varphi'}{\Delta} \tag{60a}$$

$$-\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f' r^2}{h} + \frac{2}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta} - \frac{1}{4 c R}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4} \tag{60b}$$

$$-\frac{1}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{f' r^2}{h} + \frac{3}{2}\frac{\varphi^2}{f^2} - \frac{1}{4 c R}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4} \tag{60c}$$

$$-\frac{\Delta'}{r h^2 \Delta} - \frac{w'}{r^2} + \frac{1}{4 c R}\frac{\varphi'^2}{\Delta^2} = \frac{R}{4}\ ^{1)}. \tag{60d}$$

Diese vier Gleichungen sind nach (II) nicht unabhängig voneinander, vielmehr besteht zwischen ihnen eine Identität, was auch notwendig ist, da bloß drei unabhängige Variable vorhanden sind: φ, Δ, w. Außerdem finden wir die früher allgemein bewiesene Symmetrie in bezug auf die beiden Elektrizitätsarten bestätigt. Wir eliminieren zunächst f und h.

Aus (60b) und (60c) folgt

$$\frac{3}{4}\frac{\varphi^2}{f^2} = \frac{1}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta}$$

oder

$$\frac{3}{4}\frac{\varphi^2}{f^4} = \frac{1}{r}\frac{\Delta'}{\Delta^3},$$

was mit (60a) kombiniert

$$\frac{1}{12 c^2 R^2 r^3}\left(\frac{d}{dr}\frac{r^2 \varphi'}{\Delta}\right)^2 = \frac{\Delta'}{\Delta} \tag{61}$$

und

$$\frac{1}{r h^2}\frac{\Delta'}{\Delta} = -\frac{1}{4 c R}\cdot\frac{\varphi}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2 \varphi'}{\Delta}$$

gibt. (60d) wird daher mit Rücksicht auf (58):

$$\frac{1}{4 c R}\left[\frac{\varphi}{r^2 \Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2 \varphi'}{\Delta} + \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{\varphi}{\Delta}\frac{d}{dr}\frac{r^2 \varphi'}{\Delta}\right) + \frac{\varphi'^2}{\Delta^2}\right] + \frac{1}{r^2} = \frac{R}{4}. \tag{62}$$

Man kann aus (61) und (62) eine Differentialgleichung dritter Ordnung mit der einen Unbekannten $u = \frac{r^2 \varphi'}{\Delta}$ ableiten. Zunächst erhält man eine Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi}{\Delta} \cdot A_1(u, u', u'') + B_1(u, u') = 0,$$

aus der durch Differenzieren mit Rücksicht auf (61) eine weitere Gleichung von der Form

$$\frac{\varphi}{\Delta} \cdot A_2(u, u', u'', u''') + B_2(u, u', u'') = 0$$

und dann durch Elimination von $\frac{\varphi}{\Delta}$ die gesuchte Differentialgleichung für u sich ergibt. Wäre u ermittelt, so würde nach (61) Δ durch eine Quadratur und hernach φ aus dem Ausdruck für $\frac{\varphi}{\Delta}$ folgen. Die so erhaltene Differentialgleichung ist aber so kompliziert, daß wir auf ihre explizite Wiedergabe lieber verzichten. Auf diese Weise dürfte die Integration des Problems überhaupt kaum gelingen. Es gibt aber noch einen anderen Weg, der vielleicht zum Ziel führen wird. Wir haben hier das Koordinatensystem von vornherein so normiert, daß

$$[g_{22}] = -1$$

wird. Man könnte aber auch $d\sigma^2$ zunächst in der allgemeinen Form

$$d\sigma^2 = \mu(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + l(x_1 dx_1 + x_2 dx_2 + x_3 dx_3)^2$$

(μ Funktion von r allein) ansetzen und dann das Koordinatensystem so zu bestimmen suchen, daß die Differentialgleichungen integrabel werden. Zwar ist es dem Verfasser bis jetzt noch nicht gelungen, auf diese Weise die Differentialgleichungen zu vereinfachen, doch möchte er sich vorbehalten, eventuell bei einer anderen Gelegenheit darauf zurückzukommen.

Zusammenfassung.

Für die Wirkungsfunktion wurde der allgemeine Ansatz

$$\tfrac{1}{2}(c_1 \overline{R}_{iklm}\overline{R}^{iklm} + c_2 \overline{R}_{ik}\overline{R}^{ik} + c_3 R^2) + \tfrac{1}{4} F_{ik} F^{ik}$$

1) Anmerkung bei der Korrektur. Berücksichtigt man die erwähnte Verschiedenheit der Bezeichnungen, so ergibt sich leicht, daß Weyls Gleichungen (26) (l. c., S. 130) mit unseren Gleichungen (60) äquivalent sind. Die beiden λ enthaltenden Terme treten jedoch mit entgegengesetztem Vorzeichen auf. Da die Nachprüfung der Rechnung Weyls mittels der von ihm verwendeten Methode dasselbe ergab, möchte ich mit allem Vorbehalt die Meinung aussprechen, daß hier bei Weyl ein kleines Versehen unterlaufen ist.

zugrunde gelegt und die zugehörigen elektromagnetischen und Gravitationsgleichungen berechnet. Im Fall $c_1 = 0$ ist man von vornherein sicher, mit der Perihelbewegung des Merkur nicht in Konflikt zu kommen. Die Geschlossenheit der Welt folgt ohne weiteres aus der Theorie; übrigens ist die elektrizitäts- und daher auch materiefreie, vierdimensional-geschlossene Welt von konstanter Krümmung eine Lösung der Feldgleichungen. Eine allgemeine Konsequenz der Theorie, was immer auch für eine Invariante als Wirkungsfunktion gewählt sein mag, ist ferner, daß in einem statischen Feld die Naturgesetze in bezug auf positive und negative Elektrizität symmetrisch sind. Dieser Umstand ist eine sehr große, wenn nicht unüberwindliche Schwierigkeit für Weyls Theorie. Im statischen Fall treten nur dann keine überzähligen Gleichungen auf, wenn hier W_{i0} identisch verschwindet. Das spezielle Wirkungsprinzip

$$\delta\int\left(c\,\tfrac{1}{2}R^2+\tfrac{1}{4}F_{ik}F^{ik}\right)d\omega = 0,$$

für welches diese Bedingung erfüllt ist, wurde weiter verfolgt und die zugehörigen Differentialgleichungen des Elektronfeldes ermittelt. Ihre Integration ließ sich auf die einer — allerdings äußerst kompliziert gebauten — Differentialgleichung dritter Ordnung und auf eine Quadratur zurückführen.

München, Institut für theoretische Physik.

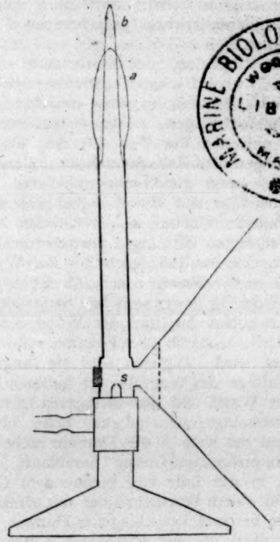
(Eingegangen 4. Juni 1919.)

Eine schallempfindliche Flamme.

Von Heinrich Mache.

Die schallempfindliche Flamme, oder richtiger der schallempfindliche Gasstrahl, — denn die Flamme wirkt nur als Indikator — wird teils nach dem Tyndallschen Verfahren hergestellt, bei dem aber hoher Gasdruck wünschenswert ist, falls die Empfindlichkeit groß sein soll, oder nach der Drahtnetzmethode von Govi[1]), die auch bei niedrigem Gasdruck anwendbar ist. In beiden Fällen brennt die Flamme unruhig und nicht ohne Geräusch, so daß sie oft auf sich selbst anspricht. Eine Flamme, die ruhig brennt wie eine Kerzenflamme und selbst bei niedrigstem Gasdruck den beiden anderen Flammen an Empfindlichkeit nicht nachsteht, läßt sich in der folgenden Weise herstellen.

An einem gewöhnlichen Bunsenschen Brenner wird die Öffnung *s*, aus der das Leuchtgas einströmt, durch eine ein ganz wenig engere ersetzt und von den beiden Löchern, durch welche sonst die Luft zutritt, das eine geschlossen, während man auf das zweite einen mit einer Membran (gewöhnliches Seidenpapier entspricht vollkommen) versehenen Trichter aufsetzt, so daß auch dort die Luftzufuhr verhindert ist. Man kann dann durch langsames Drosseln des Gasstroms bewirken, daß die Flamme zunächst sehr unruhig wird. Erhöht man die Gaszufuhr, so wird die Flamme auch sofort wieder ruhig und brennt wie gewöhnlich mit helleuchtender Flamme



MARINE BIOLOGICAL LABORATORY
WOODS HOLE
LIBRARY
MASS.

(Stellung *a*). Erniedrigt man die Gaszufuhr hingegen noch ein wenig, so tritt der Flammenrand in das Rohr ein (bis über 1 cm Tiefe), während die Mitte als nun sehr steiler Kegel und von der Spitze abgesehen im Blaulicht der bei Luftzumischung entstehenden Flamme leuchtend, wieder vollkommen ruhig brennt (Stellung *b*). Diese Flammenform ist es, die gegen Geräusche und Töne von einer gewissen Höhe aufwärts außerordentlich empfindlich ist, indem hierdurch während der Dauer des Geräusches oder des Tons die Flamme aus der Stellung *b* in die Stellung *a* zurückspringt. Da hierdurch eine sehr bedeutende Erhöhung der Leuchtkraft eintritt, so ist die Erscheinung, zumal im verdunkelten Raum, ungemein auffallend.

1) Vgl. z. B. K. Rosenberg, Zeitschr. f. phys. u. chem. Unterricht **29**, 181, 1916.

Es ist keineswegs nötig, daß der austretende Leuchtgasstrahl sich genau in der Achse des Brennerrohres befindet. Seitliche Lage bewirkt nur, daß der Flammenrand einseitig, also nur teilweise in das Rohr zurücktritt, ohne daß hierdurch die Schallempfindlichkeit merkbar beeinträchtigt wird.

Auffallend ist das selektive Verhalten dieser Flammen gegenüber Vokalen. Vor allem auf das *A*, schon weit weniger auf das *E* spricht die Flamme an und fast gar nicht auf die anderen Vokale, wenn sie nicht überlaut gesprochen werden. Hingegen wird ein mit Gesprächsstärke aus 40 Schritt Entfernung gegen den zugewendeten Trichter gesprochenes *A* voll angezeigt.

Die Erklärung der Erscheinung muß auf die des Tyndallschen Gasstrahls zurückgreifen. Zweifellos handelt es sich zunächst um zwei Gleichgewichtslagen. Das ausströmende Gas kann entweder die Luft aus dem Rohr ganz verdrängen und das ganze Rohr füllend emporsteigen, unter gleichzeitiger äußerer Reibung zwischen Gas und Wand, wobei sich dann die gewöhnliche Flamme *a* bildet, oder aber der aus der engen Öffnung *s* austretende Gasstrahl breitet sich im Rohr nicht bis zur Wand aus, mischt sich vielmehr noch im Rohr mit der infolge der hydrodynamischen Saugwirkung von oben zwischen ihm und der Wand eindringenden Luft, wodurch die Flamme teilweise entleuchtet wird. Zugleich wird sie länger, weil jetzt infolge des Wegfalls der äußeren Reibung an der Wand und des geringeren Querschnitts die Strömungsgeschwindigkeit höher bleibt.

Daß im Falle *b* die Flamme nicht bis auf die Ausströmungsöffnung herabläuft, wie bei einem in der Luft frei brennendem Gasstrahl oder in einem Bunsenbrenner mit offenen Luftlöchern bei zurückgeschlagener Flamme, sondern höher oben an der Rohrwand hängen bleibt, ist leicht zu verstehen. Die Beobachtung zeigt, daß sich im untersten kalten Teile des Rohres Wassertropfen niederschlagen. Es sind eben an der Flamme *b* zwei Teile zu unterscheiden. Der mittlere Teil, in dem Gasüberschuß herrscht, und in dem die Strömung von unten nach oben gerichtet ist und der äußere der Wand benachbarte Teil, der ganz von Wirbeln durchsetzt erscheint, in dem aber im ganzen eine nach abwärts gerichtete Bewegung vorherrscht. Dort ist die Luft weit im Überschuß und Gas nur soweit vorhanden, als es aus der den Gasstrahl umgebenden Wirbelschichte mechanisch und durch Diffusion eindringt. Dieses Gas verbrennt in dem an der Wand haftenden, nicht scharf ausgebildeten Flammenrand. Das noch sehr luftreiche Verbrennungsprodukt dringt aber weiter nach unten, setzt an den kalten Stellen Verbrennungswasser ab, worauf es vom Gasstrahl, mit dem es sich zum Teil mischt, wieder nach oben gerissen wird.

Was die Erklärung der Schallempfindlichkeit anlangt, so ist auch hier der Sitz der Erscheinung in der Ausströmungsöffnung zu suchen. Unter dem Einfluß der dort durch die Membran senkrecht zum austretenden Strahl auftreffenden Schallschwingungen gerät der Strahl in transversale Schwingungen, wodurch Berührung der Wand und Umschlagen aus der Lage *b* in die Lage *a* eintritt. Am offen brennenden Strahl wäre bei den hier herrschenden Druckverhältnissen dieses Mitschwingen, das sich durch Kürzer- und Breiterwerden der Flamme äußert, nicht ohne weiteres wahrzunehmen. Durch das hierdurch veranlaßte Umschlagen der Flamme in die andere Gleichgewichtslage wird die Erscheinung aber sehr auffallend.

Eine in mancher Hinsicht ähnliche Anordnung zur Erzeugung einer schallempfindlichen Flamme wurde von Rayleigh angegeben[1]). Doch handelte es sich dort offenbar nicht um die hier beschriebene Erscheinung des Übergangs zwischen zwei Flammenformen, sondern um eine ganz unmittelbar wahrzunehmende Beeinflussung des Tyndallschen Strahles.

1) Theory of Sound, Bd. II, 2. Aufl. S. 402; Proc. Camb. Phil. Soc. **4**, 17, 1883.

(Eingegangen 18. Juni 1919.)

Eine einfache Demonstration zum Huyghensschen Prinzip.

Von Heinrich Mache.

Da es meines Wissens hierzu keinerlei Versuch gibt, dürfte das im folgenden geschilderte Verfahren nicht unwillkommen sein.

Man benötigt ein Zelluloidblatt von etwa $^1/_3$ mm Dicke; aber auch nicht zu dünner photographischer Film, den man von der Gelatine befreit hat, kann Verwendung finden.

Legt man ein Stück von solchem Zelluloidblatt in horizontaler Lage auf eine nur stellenweise berührende Unterlage, etwa einen Dreifuß und zündet mit einer kleinen Flamme an irgendeiner Stelle der Oberfläche, so schreitet die Entzündung von der Zündstelle aus auf einem vollkommenen Kreis weiter; es brennt ein kreisrundes Loch aus, dessen Radius der Zeit proportional anwächst.

Hält man das Blatt vertikal und zündet an

irgendeiner Stelle des oberen Randes, so wird die Erscheinung verwickelter, da sich jetzt die Entzündung nicht nur über die Fläche, sondern auch über den Rand des Blattes und zwar dort mit weit größerer als der Flächengeschwindigkeit ausbreitet. Es rührt dies davon her, daß am Rand der zur Fortleitung der Entzündung nötige Sauerstoff in reichlicherer Menge zur Verfügung steht als in der Fläche. In der Fläche ist jedes Element der Brennlinie auf den Sauerstoff beschränkt, den es senkrecht zu seiner Richtung vorfindet, seitwärts wird der Sauerstoff von den benachbarten Brennlinienelementen verbraucht. Am Rande findet sich hingegen Sauerstoff ringsherum.

„Es habe das Blatt ursprünglich die beliebige, gestrichelt gezeichnete obere Begrenzung und es werde bei z gezündet[1]). Gäbe es keine Ausbreitung der Entzündung über den Rand, so wäre nach einer Sekunde die Brennlinie einfach der mit der Flächengeschwindigkeit der Entzündung c als Halbmesser geschlagene Kreis. Tatsächlich hat sich aber während dieser Sekunde die Entzündung auch über den

Fig. 1.

Rand nach links und rechts so weit ausgebreitet, als der Randgeschwindigkeit C entspricht: nach links bis A, nach rechts ebensoweit bis B. Alle Punkte zwischen z und A sind während der Sekunde nacheinander von der Entzündung ergriffen worden und von jedem dieser Punkte hat sich sofort die Entzündung auch über die Fläche kreisförmig ausgebreitet. Diese Kreise haben am Ende der Sekunde Radien erreicht, proportional den Zeiten, welche seit der Zündung des zugehörigen Zentrums verflossen sind. Die Umhüllende aller dieser Kreise gibt offenbar die neue Brennlinie". Der Randwinkel α bei A und B ist, wie immer die Begrenzung des Blattes verlaufen mag, ein für eine bestimmte Blattdicke ganz bestimmter und durch die Beziehung $\sin\alpha = \frac{c}{C}$ festgelegt.

Ist die Begrenzungslinie eine Gerade, so entsteht unter z ein Kreisbogen, an den von A und B aus unter dem Winkel α Tangenten gehen. Wird ein längerer, rechteckiger Streifen in der Mitte der oberen Kante gezündet, so bildet sich nach einiger Zeit über Formen, die aus obiger Darlegung gegeben sind, eine Spitze aus, die dann weiterhin unverändert mit der Geschwindigkeit C herunterbrennt und deren halber Öffnungswinkel gleich α ist. Löscht man aus und zündet die Spitze neuerdings, so bildet sich auf ihr zunächst eine zweite mit dem doppelten Öffnungswinkel usw.

Es ist bemerkenswert, mit welcher Regelmäßigkeit sich die Brennlinien bilden und es ist auch durchaus nicht nötig, die Blätter oder Streifen genau senkrecht zu halten. Selbst bei horizontaler Lage sind die Brennlinien die gleichen, wenn auch der Randwinkel nicht mehr so konstant ist. Nur umdrehen darf man das brennende Blatt natürlich nicht, da dann die Ausbreitung der Entzündung durch die aufsteigenden Flammengase ganz regellos erfolgt.

Hier soll nur noch ein Versuch beschrieben werden, der die vollkommene Analogie mit der Brechung einer ebenen Welle bietet:

Man schneidet hierzu aus dem Zelluloid einen längeren Streifen, etwa 4 cm breit und kittet auf ihn in der unteren Hälfte einen zweiten, dessen oberer Rand EF schräg zugeschnitten wird. Das Aufeinanderkitten der beiden Streifen läßt sich mittels eines Ätheralkoholgemisches, in dem sich Zelluloid löst, ohne weiteres bewerkstelligen. Im doppelt dicken unteren Teil des Streifens, wo bei glei-

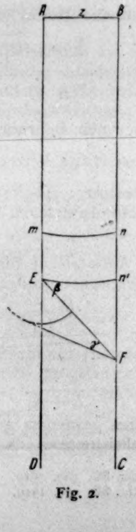


Fig. 2.

1) „Physik der Verbrennungserscheinungen", Veit & Co., Leipzig 1918, S. 82.

cher verfügbarer Sauerstoffmenge mehr brennbare Gase entwickelt werden, ist die Flächengeschwindigkeit der Entzündung beträchtlich herabgesetzt. An den Rändern AD und BC muß man bei diesem Versuch die Randentzündung verhindern, was durch Überkleben mit ganz schmalen Streifen Seidenpapier oder Eintauchen der beiden Ränder in einen Lack (Zellonlack) geschieht. Wird dann bei z gezündet, so entsteht unter z ein Kreisbogen, der mit fortschreitender Verbrennung immer mehr die Form einer zur Streifenrichtung senkrechten Linie (mn) annimmt. Trifft m bei E ein, so bildet sich um E ein Kreis aus und während n' bis F fortschreitet, ist der Halbmesser dieses Kreises auf $\frac{c'}{c} \cdot n'F$ gewachsen, wenn c' die Flächengeschwindigkeit der Entzündung im dicken Teil des Streifens bezeichnet. Die von F an diesen Kreis gezogene Tangente gibt die Richtung der neuen Brennlinie, die nun mit weiterhin unveränderter Neigung im dicken Teil des Streifens herabbrennt. Es hat „Brechung zum Lot" stattgefunden und es ist

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{c}{c'}.$$

Man kann das regelmäßige Abbrennen der Blätter und Streifen in den beschriebenen Versuchen weithin sichtbar machen, wenn man es vor der Projektionslampe vornimmt und das Bild mittels einer großen Linse (Kondensorlinse) auf dem Schirm entwirft.

Wien, Technische Hochschule, Juli 1919.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

Über den Sehraum.

Von Hans Witte.

Achte Mitteilung: Höchstraum und Mindestraum.

1.

Im sechsten Aufsatz[1]) ist für die Sehgrößen y das Gesetz hergeleitet worden

$$y = \frac{B \cdot E}{E + X}, \tag{1}$$

in siebenten Aufsatz[2]) für die Sehfernen x

$$x = \frac{w \cdot X}{E + X}. \tag{2}$$

Die Gesetze waren gewonnen aus der Betrachtung eines Parallelstreifens $C\infty\ D\infty$, der sich vom Beobachter geradlinig ins Unendliche erstreckt, z. B. eines Weges (Fig. 1 und 3). Der Beobachter steht nächst dem Punkte C und blickt in der Richtung $C\infty$. Die Abszisse X bezeichnet die wahre Entfernung eines Punktes des Streifens vom Beobachter, die Ordinate B die feste Breite des Streifens, also die wahre Größe an der Stelle X.

2.

Die Konstante E bezieht sich vornehmlich und ursprünglich auf die Sehgröße y. Sie ist die Konstante des Laqueurschen Größensehraums und bildet ein Maß für die Schnelligkeit, mit der die Sehgröße y abnimmt, wenn die wahre Entfernung X wächst (Fig. 2). Wäre $E = \infty$, so sähe der Weg an jeder Stelle X so breit (B) aus wie im Anfang. Da er dies nicht tut, hat E einen endlichen Wert, der für das Folgende als bestimmt gedacht werden soll.

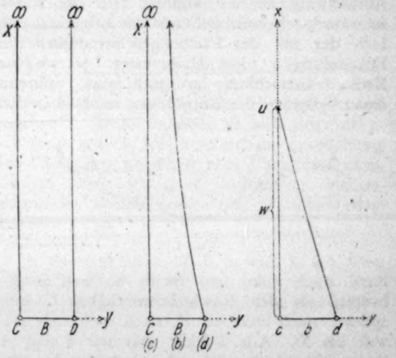


Fig. 1. Parallelstreifen, wie er wirklich ist ($C\infty$, $D\infty$).

Fig. 2. Sehgröße y allein als Funktion der wahren Entfernung X.

Fig. 3. Parallelstreifen, wie er aussieht (cu, du).

3.

Die Konstante w bezieht sich nur auf die Sehferne x. Sie mißt den Abstand $(x)_{X=\infty}$ des Seh-Unendlichkeits-Punktes vom Beobachter $C = c$ (Fig. 3). Sie ist schwer zu bestimmen, denn wir besitzen für Sehfernen kein treffsicheres Maß. Immerhin bestehen, wie im fünften[1]) und siebenten[2]) Aufsatz gezeigt, für w zwei Grenzen.

1) Diese Zeitschr. **20**, 389, 1919.
2) Diese Zeitschr. **20**, 439, 1919.

1) Diese Zeitschr. **20**, 368, 1919.
2) a. a. O.

4.

Die Sehferne x muß in jedem Falle kleiner sein als die wahre Entfernung X. Dem kann nach Gleichung (2) nur entsprochen werden, wenn $w < E$ ist. Der noch zu bestimmende Wert der Laqueurschen Konstante E sei z. B. 2 km, dann dürfte die scheinbare Sehraumgrenze w unter keinen Umständen den Wert 2 km übersteigen. Die Entfernungen unendlich ferner Gegenstände müßten mindestens auf 2 km, vielleicht noch stärker verkürzt erscheinen.

Dieser Höchstsehraum folgt aus den Sehraumgleichungen selber, daher ist über ihn nichts weiter zu sagen.

5.

Auf der anderen Seite hat man bisher als selbstverständlich gefordert, daß die Sehfernen nicht unvernünftig kleine Werte annehmen. Würde einem eingeredet, er sähe die weitesten Entfernungen bis zum Horizont in einer Scheinentfernung von 200 oder gar 100 m, so würde er das leugnen. Vollends würde er denjenigen Wert von sich weisen, welchen die „Raumbedingung" angibt; d. h. den man fordern müßte, wenn die Sehfernen zu den beobachteten winzigen Sehgrößen der Himmelskörper („Tellermond" usw.) zahlenmäßig passen sollten. Wie früher aus der Raumbedingung[1])

$$\frac{\text{Sehferne}}{\text{Sehgröße}} = \frac{\text{Wahre Entfernung}}{\text{Wahre Größe}} \qquad (3)$$

sowie dem Tellermond[2]) berechnet, ist das der Wert ca. 44 m. Dieser Wert kann als untere Grenze angesehen werden, in dem Sinne, daß man den Mindestsehraum von ca. 44 m Ausdehnung für viel zu klein, den tatsächlich bestehenden Sehraum für sehr viel weiter hält.

6.

Die Ansicht, daß die Sehfernen notwendigerweise diesen Mindestsehraum überschreiten müßten, fußt bis jetzt nur auf denjenigen rohen Zahlen, die man bei dem unvollkommenen Messen von Sehfernen im Gelände erhält, auf der allgemeinen, ausgesprochenen oder unausgesprochenen, Zustimmung der Fachgelehrten, und schließlich gewissermaßen auf dem natürlichen Empfinden. Wir wollen jetzt den Mindestsehraum mit den Sehraumgesetzen (1) und (2) in Beziehung bringen und prüfen, was die Gesetze fordern.

7.

Es handelt sich darum, daß die Raumbedingung

$$\frac{x}{y} = \frac{X}{Y} \qquad (4)$$

überschritten werden soll. Die Sehfernen x sollten erheblich größer sein, als sie die Raumbedingung mit ihren 44 m Höchstwert gestattet. Wieviel größer muß in den Gesetzen (1) und (2) durch den Betrag der Unendlichkeitskonstante w zum Ausdruck kommen. Wir bilden aus (1) und (2) das Verhältnis von Sehferne x zu Sehgröße y und erhalten

$$\frac{x}{y} = \frac{w}{E} \cdot \frac{X}{B} \,. \qquad (5)$$

B ist die Breite des Parallelstreifens (Fig. 1 und 3), d. h. die wahre Größe Y. Rechts steht also das Verhältnis von wahrer Entfernung X zu wahrer Größe Y, malgenommen mit dem Bruch w/E, infolgedessen ist dieser Bruch w/E das gesuchte Maß für die Überschreitung der Raumbedingung (4) durch die Sehferne x.

8.

Nun ergibt sich folgender einfacher Schluß: Die Raumbedingung soll überschritten werden, also muß $w > E$ sein. Oben ist bewiesen worden (vgl. § 4), daß $w < E$ sein muß. Folglich ist $w = E$.

9.

Das heißt: Der Sehraum liegt auch bezüglich der Entfernungserstreckung eindeutig fest. Und zwar deckt er sich mit demjenigen Raum, der oben als „Höchstsehraum" bezeichnet wurde, dessen Unendlichkeitsgrenze die Laqueursche Konstante E mißt.

Dieser Höchstsehraum hat jedoch nicht die vermutete erhebliche Ausdehnung von vielen Kilometern, sondern deckt sich seinerseits mit demjenigen „Mindestsehraum", der die Raumbedingung erfüllt, $x/y = X/Y$.

10.

Das Ergebnis befremdet. Um es verständlicher zu machen, wollen wir die drei Schulbeispiele des sechsten Aufsatzes heranziehen[1]).

Fig. 4 entspricht dem Beispiel 1. Die auseinanderlaufenden Linien $C\infty$ und $D\infty$ erscheinen als Parallelstreifen cu, dv. Die Entfernung des rückwärtigen Schnittpunkts A' der Geraden $C\infty$ und $D\infty$ vom Beobachter C ist die Laqueursche Konstante E. Die Strecke $cu = dv = w$ mißt die Scheingrenze des Sehraums. Daß sie $= E$ ist, bedeutet, der Bildpunkt v des Punktes ∞ der rechten Geraden $D\infty$ liegt vom Beobachter C aus in derselben Richtung wie der abgebildete Punkt ∞ selbst,

1) Fünfte Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 368, 1919.
2) Dritte Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 114, 1919.

1) a. a. O.

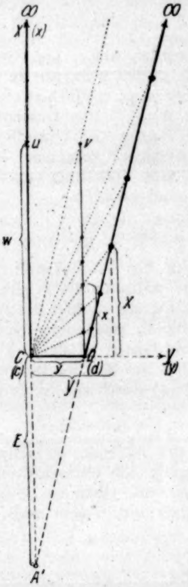


Fig. 4.

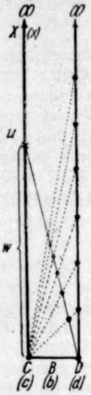


Fig. 5.

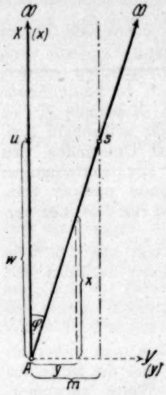


Fig. 6.

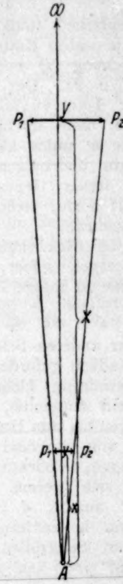


Fig. 7.

cv läuft zu $A'D\infty$ parallel. Darin liegt zugleich, daß dies Punktpaar die Raumbedingung $x/y = X/Y$ erfüllt. In entsprechender Weise und Bedeutung genügen ihr alle näher gelegenen Punkte (vgl. Fig. 4). Sie liefert das einfache Mittel, zu gegebenen wahren Punkten Bildpunkte zu zeichnen, oder auch umgekehrt die Ursprungspunkte festzulegen, welche gewünschte Scheinpunkte erzeugen[1]).

Fig. 5 führt das Beispiel 2 weiter, das diesmal bereits in Fig. 1—3 benutzt worden ist. Der wahre Parallelstreifen $C\infty\, D\infty$ scheint in den Punkt u zusammenzulaufen. Wieder erlaubt die Raumbedingung, die Scheinpunkte einfach zu zeichnen, usw.

Fig. 6 erneut das Beispiel 3. Der Sehwinkel φ oder das Netzhautbild bleibt gleich. Gefragt wird nach der Sehgröße y und jetzt auch der Sehferne x von Gegenständen, die gleichen Sehwinkel haben; am einfachsten wird ein Nachbild von Handnähe bis ins Unendliche verfolgt. Das Nachbild wächst dann asymptotisch bis zu einer äußersten Sehgröße m, die für $X = \infty$ erreicht wird und den Wert $E \cdot \operatorname{tang} \varphi$ besitzt. Daß die äußerste Scheinferne w gleich E sein soll, bedeutet, im Scheinraum wird der Größengrenzwert m da erreicht, wo der Sehstrahl $As\infty$ die Asymptote schneidet. Den Weg bis dahin legt die rechte Bildkante als Scheingerade As zurück, die Raumbedingung heißt hier einfach $y/x = \operatorname{tang} \varphi$ und sagt, daß die Sehferne in demselben Maße wächst, wie das gesehene Bild größer ausgewertet wird[1]).

II.

Die Formeln lassen sich, wie leicht ersichtlich, in allen Fällen auf die gemeinsame Gestalt bringen

$$x = \frac{E \cdot X}{E + X} \tag{6}$$

$$y = \frac{E \cdot Y}{E + X} \tag{7}$$

1) Wobei erinnert werden mag, daß die Gesetze nur unter der früher besprochenen Vernachlässigung gelten. Sechste Mitteilung, diese Zeitschr. **20**, 390, 1919.

1) Die (nicht bewußt erlebte) Sehferne wächst im selben Verhältnis wie die (bewußt erlebte) Sehgröße. Oder umgekehrt: Die erlebte Sehgröße wie die nichterlebte Sehferne. Welches von beiden im psychophysischen Zusammenhang das Ursprüngliche ist, soll in einem späteren Aufsatz erörtert werden.

Sie gelten (Fig. 7) für einen beliebigen, der Blickrichtung $A\infty$ einigermaßen nahen Gegenstand $P_1 P_2$, bestimmen die Sehferne x und die Sehgröße y aus der wahren Entfernung X und der wahren Größe Y, und enthalten nur die einzige Konstante E. Diese, die Laqueursche Konstante, hat die verschiedenen oben angegebenen Bedeutungen, darunter als anschaulichste, wiewohl nicht zur Messung geeignetste, das Seh-Unendlich, die Scheingrenze des Sehraums. Die Konstante E zu messen, durch mehrfache Messungen die Gesetze (6) und (7) zu bestätigen, ist die nächste Aufgabe.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im Mai 1919.

(Eingegangen 20. Mai 1919.)

Bemerkung zu der Notiz von H. v. Dechend und W. Hammer: „Szintillation bei Kanalstrahlen"[1]).

Von Eduard Rüchardt.

In der genannten Notiz wenden sich die Verfasser gegen eine Bemerkung von W. Wien im „Handbuch der Radiologie", in der die in den Verh. der Deutsch. Phys. Ges. 1910, S. 531 beschriebene Beobachtung der Verfasser von Szintillation bei Kanalstrahlen aus energetischen Gründen bestritten wird. Da diese Bemerkung sich auf eine Arbeit von mir[2]) stützte, seien mir einige Worte hierzu gestattet.

In der Notiz in den Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. sind keine bestimmten Angaben über die Geschwindigkeit der Strahlen gemacht, infolgedessen habe ich die Geschwindigkeit zu niedrig eingeschätzt. Aber auch bei der Verwendung von Strahlen einer Geschwindigkeit größer als $3 \cdot 10^8$ cm/sec erscheint die Beobachtung aus folgenden Gründen merkwürdig. Ich hatte meiner Berechnung des Wirkungsgrades für Sidot-Blende eine Zahl von H. Baerwald[3]) zugrunde gelegt, wonach ZnS ungefähr 3,5 mal heller leuchet als der von mir untersuchte grüne Sr-Bi-Na-Phosphor. Nun sind aber, wie ich in einer späteren Untersuchung[4]) gezeigt habe, die Angaben von Baerwald infolge nicht genügender Beachtung der Zerstörung der Phosphore durch Kanalstrahlen nicht einwandfrei, und eine allgemeine einfache Betrachtung lehrt, daß ein so großer Wirkungsgrad für ZnS nicht wahrscheinlich ist. Nimmt man nämlich an, daß der Wirkungsgrad gegeben ist durch den Bruchteil der Energie, den ein Wasserstoffatom bei einem elastischen Zusammenstoß mit einem Elektron des Phosphormoleküls auf das Elektron überträgt, derart, daß diese Energie ganz als Phosphoreszenzlicht zum Vorschein kommt, so berechnet sich der Wirkungsgrad durch Anwendung des Impuls- und Energiesatzes zu 0,002. Natürlich kann er auch kleiner sein, wenn nämlich ein Teil der übertragenen Energie, z. B. als Austrittsarbeit des Elektrons aus dem Phosphormolekül, verloren geht. Auf diese Möglichkeit, den Wirkungsgrad zu schätzen, hat mich gesprächsweise Herr Gerlach aufmerksam gemacht. Das Resultat stimmt gut mit meinen Messungen am Sr-Bi-Na-Phosphor. Es ist danach aber nicht leicht einzusehen, wie der Wirkungsgrad bei einzelnen Phosphoren größer sein sollte als 0,002. Mit dieser Zahl findet man für die bei einer Szintillation ausgesandte Energie bei Erregung mit Wasserstoffatomstrahlen von $3 \cdot 10^8$ cm/sec Geschwindigkeit $1{,}44 \cdot 10^{-10}$ Erg., also weniger als die Reizschwelle des Auges beträgt. Aber selbst angenommen, der Wirkungsgrad für ZnS wäre 0,005 und demnach die bei einer Szintillation ausgesandte Energie $3{,}6 \cdot 10^{-10}$ Erg., so ist zu bedenken, daß auch bei Verwendung eines Mikroskops nur ein kleiner Bruchteil dieser Energie ins Auge gelangen kann. Selbst im äußerst günstigen Falle bei einer numerischen Apertur von 0,9 und ohne Berücksichtigung der Reflexionsverluste beträgt dieser Bruchteil weniger als $^1/_3$. In der Arbeit von H. v. Dechend und W. Hammer finden sich leider keine Angaben über das benutzte Mikroskop. Man sieht aber, daß man selbst im günstigsten Falle nicht an die Reizschwelle des Auges herankommt, es sei denn, daß die Geschwindigkeit der Strahlen noch wesentlich größer war als vermutet. Jedenfalls erscheint es bei diesem Tatbestand wünschenswert, den Versuch zu wiederholen. Ob der Wirkungsgrad für Sidot-Blende genügend gut bekannt ist, um im Falle der Realität des Effekts auf dieser Methode eine Neubestimmung der Reizschwelle vorzunehmen, ist nach dem Obigen zweifelhaft. Wohl aber kann der Wirkungsgrad für den Sr-Bi-Na-Phosphor als genügend sicher angesehen werden, zumal er sich bei der quantitativen Erklärung der Grenze des Phosphoreszenzleuchtens bei einer bestimmten kleinsten Kanalstrahlenergie („Geschwindigkeit") gut bewährt hat[1]).

1) Diese Zeitschr. **20**, 234, 1919.
2) Ann. d. Phys. **45**, 1063—1087, 1914.
3) Ann. d. Phys. **39**, 849—886, 1912.
4) Ann. d. Phys. **48**, 838—875, 1915.

1) Vgl. letzte Anmerkung.

Würzburg, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 30. Juni 1919.)

Notiz zu dem Aufsatze von Herrn Jentzsch-Gräfe über die Mechanik des Freiballons [1]).

Von R. Seeliger.

Zu dem genannten Aufsatz von Hrn. Jentzsch-Gräfe sei mir die Bemerkung erlaubt, daß ich vor längerer Zeit in dieser Zeitschrift (**17**, 419, 1916) das Luftwiderstandsgesetz für Freiballons bereits an Hand von Beobachtungen an Pilotaufstiegen durchdiskutiert habe. Ohne auf Sachliches hier einzugehen, möchte ich nur hierauf hinweisen, da meine Arbeit — die sich zum Teil also mit ganz ähnlichen Fragen beschäftigt wie die von Hrn. Jentzsch behandelten — Hrn. Jentzsch vollständig entgangen zu sein scheint.

1) Diese Zeitschr. **20**, 320, 1919.

(Eingegangen 15. August 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der Energieinhalt der Festkörper im Lichte der neueren Forschung.

Von Erwin Schrödinger.

(Fortsetzung.)

§ 12. Wenden wir dies auf einen konkreten „Block" des Festkörpers (Gewicht = 1 Grammatom) an[1]), dann ist uns jedenfalls ein Teil der Eigenschwingungen dieses Blocks wohl bekannt und vertraut: Nämlich die gewöhnlichen elastisch-akustischen Eigenschwingungen. Nun hängt allerdings der Grundton und die ersten Obertöne, der Anfang des „akustischen Spektrums", bekanntlich noch stark von der speziellen Gestalt ab, die man dem Block gegeben hat. Schreitet man aber zu immer höheren Obertönen fort, bei denen der Block von immer zahlreicheren Knotenflächen durchschnitten wird, so tritt der Einfluß der Gestalt sehr bald ganz zurück, wenigstens was die Verteilung der ν-Werte auf einer ν-Achse anlangt. Die Zahl der Eigenfrequenzen, die in bestimmte Grenzen fallen, wird dem Volumen des Blocks proportional, und zwar ergibt die Rechnung zwischen ν und $\nu + d\nu$

$$12\pi V \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\nu^2 d\nu \tag{30}$$

Eigenschwingungen, wenn V das Atomvolum[2]), c_l und c_t die Schallgeschwindigkeit für longitudinale bzw. transversale elastische Wellen bezeichnen[3]).

Es ist zu erwarten, daß der Ausdruck (30) — als Ergebnis der klassischen Elastizitätstheorie kontinuierlicher Medien — um so unrichtiger wird, je größer die Frequenz ν, je kürzer und mit dem Atomabstand vergleichbarer daher die zugehörige Wellenlänge ($\sim$ Abstand benachbarter Knotenflächen) wird. In der Tat kann man nach der Kontinuumsvorstellung die Berechnung höherer und höherer Obertöne soweit treiben als man will, während nach unserem — vorläufig nach ganz allgemeinem — Strukturbild schon die Berechnung der $3N + 1^{\text{ten}}$ Eigenfrequenz eine vollkommene Utopie ist! Nach Debye darf man aber das durch (30) gegebene Spektrum des mit den gleichen elastischen Eigenschaften ausgestatteten Kontinuums als eine zur Berechnung des Energieinhalts ausreichende Annäherung an das wahre Schwingungsspektrum ansehen, wenn man der atomaren Struktur nur dadurch Rechnung trägt, daß man (30) nicht weiter als bis zur $3N^{\text{ten}}$ Eigenschwingung gelten läßt und das Spektrum dort schroff abbricht. Dieses beispiellos kühne Verfahren liefert uns ohne irgendein detaillierteres atomistisches Strukturbild den Energieinhalt U unmittelbar als Funktion der meßbaren Schallgeschwindigkeiten und des Atomvolums.

Um U zu finden, hat man einfach die durch (30) gegebene Zahl der Eigenschwingungen zwischen ν und $\nu + d\nu$ mit dem jeder einzelnen durchschnittlich zukommenden Energiewert $E(\nu, T)$, nach (14), zu multiplizieren und das Produkt über den ganzen Frequenzbereich zu integrieren:

$$U = 12\pi V \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\int_0^{\nu_m} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}\, d\nu, \tag{31}$$

wobei ν_m („ν-maximal") gegeben ist durch

$$12\pi V \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3} + \frac{2}{c_t^3}\right)\int_0^{\nu_m} \nu^2 d\nu = 3N. \tag{32}$$

Daß wir dabei den Ausdruck (30) bis $\nu = 0$ herab gelten lassen und auch die Integrale (31) und (32) von $\nu = 0$ angefangen erstrecken (statt von der Frequenz des Grundtons), ist eine durch den äußerst geringfügigen Beitrag der niedrig-

1) P. Debye l. c.

2) Quotient aus chemischem Atomgewicht und Dichte.

3) Debye leitet (30) ursprünglich für ein kugelförmiges Grammatom ab. Eine allgemeine Ableitung gibt M. v. Laue, Ann. d. Phys. (4) **44**, 1210, 1914.

sten Eigenschwingungen und in Anbetracht des außerordentlich hohen Wertes von ν_m vollauf gerechtfertigte Vereinfachung.

Zur Berechnung von C_v ist (31) nach T zu differenzieren. Dabei wäre eigentlich zu berücksichtigen, daß c_l und c_t (daher nach (32) auch ν_m) — auch bei konstantem V — Temperaturfunktionen sein können. Hält man die Variabilität für geringfügig genug, um sie zu vernachlässigen gegenüber dem expliziten durch die Quantenformel bedingten Auftreten von T, so ergibt sich

$$C_v = A\frac{\partial U}{\partial T} = 12\pi VA\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right)\cdot \int\limits_0^{\nu_m}\frac{\frac{h^2\nu^4}{kT^2}e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}d\nu. \tag{33}$$

Den Ausdrücken (31) und (33) läßt sich eine viel durchsichtigere Gestalt geben. Führt man in (32) die Abkürzung ein

$$\frac{1}{\bar{c}^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{c_l^3}+\frac{2}{c_t^3}\right), \tag{34}$$[1]

so wird

$$\nu_m = \bar{c}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi V}}. \tag{35}$$

Der Koeffizient vor den Integralen (31) und (33) wird $9N/\nu_m^3$ bzw. $9AN/\nu_m^3$. Führt man ferner, in Analogie mit (21), in den Integralen die Integrationsvariable

$$\xi = \frac{h\nu}{kT},\ \text{ferner die Abkürzung}\ x = \frac{h\nu_m}{kT} \tag{36}$$

ein, so ergibt sich leicht

$$\left.\begin{aligned} U &= 3RT\cdot\frac{3}{x^3}\int\limits_0^x\frac{\xi^3}{e^\xi-1}d\xi \\ C_v &= 3AR\left[\frac{12}{x^3}\int\limits_0^x\frac{\xi^3}{e^\xi-1}d\xi-\frac{3x}{e^x-1}\right]\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

(letzteres nach Ausführung einer naheliegenden partiellen Integration). — Setzt man noch, analog mit (23),

$$\Theta_{\text{Deb.}} = \frac{h\nu_m}{k} \tag{38}$$

daher

$$x = \frac{\Theta_{\text{Deb.}}}{T}, \tag{39}$$

so erkennt man:

Auch nach der jetzt behandelten Auffassung Debyes sollen die C-Verläufe verschiedener Stoffe zur Deckung gebracht werden können, lediglich durch individuelle Wahl des Temperaturmaßstabes. Denn nach (37^2) hängt C_v nur von $T/\Theta_{\text{Deb.}}$ ab; $\Theta_{\text{Deb.}}$ ist eine Materialkonstante, die sich nach (38), (35) und (34) aus beobachtbaren nicht-thermischen Materialkonstanten soll berechnen lassen. — Für kleine Werte von x, d. i. (gegen $\Theta_{\text{Deb.}}$) große Werte von T konvergiert natürlich (37^2) ebenso wie (27^2) und (22) gegen den Dulong-Petitschen Wert $3AR$.

Prüfung der Debyeschen Theorie an der Erfahrung.

§ 13. Die Prüfung der Theorie an der Erfahrung zerfällt naturgemäß in 3 Teile

a) Gibt es eine Körperklasse, für die das Theorem der thermisch übereinstimmenden Zustände gilt?

b) Ist die Funktionsform durch (37^2) richtig wiedergegeben?

c) Liefern (34), (35) und (38) den richtigen Wert für ν_m bzw. für $\Theta_{\text{Deb.}}$?

Bezüglich a) und b) ist dem früher Gesagten zunächst nur noch hinzuzufügen, daß die (mehrfach gezeichnete) Kurve der Fig. 6 und die Kurve (1) Fig. 2, die uns bisher als zusammenfassender Ausdruck der Beobachtungen galten, in Wahrheit die Debyesche Funktion (37^2) darstellen[1]. Ferner zeigen die Spalten 9 und 10 der Tab. III den ausgezeichneten Anschluß der Debyeschen Funktion an die mehrfach als Zahlenbeispiel herangezogenen Cu-Messungen, und zwar bis zu den tiefsten Temperaturen. (Näheres über das Verhalten bei tiefster Temperatur s. u. § 16.)

Der Vergleich der thermischen [d. h. zur bestmöglichen Anpassung des C_v-Verlaufs an (37^2) ausgewählten] Θ-Werte der Tab. II mit den aus den Schallgeschwindigkeiten zu berechnenden, ist nicht in demselben Umfang durchführbar, da er die Kenntnis des gesamten elastischen Verhaltens, bei isotropen Körpern etwa der Kompressibilität $\varkappa$ und der Poissonschen Zahl[2] σ erfordert. Wenn ϱ die Dichte, so ist bekanntlich[3])

$$c_l = \sqrt{\frac{3(1-\sigma)}{(1+\sigma)\varkappa\varrho}};\qquad c_t = \sqrt{\frac{3(1-2\sigma)}{2(1+\sigma)\varkappa\varrho}} \tag{40}$$

und nach (34)

1) $\bar{c}$ ist also ein in eigentümlicher Weise gebildetes Mittel aus den beiden Schallgeschwindigkeiten.

1) Eine Tabelle für diese wichtige Funktion findet man bei W. Nernst, Berl. Ber. 1912, S. 1175.

2) Verhältnis der Querkontraktion zur Längsdehnung.

3) Siehe z. B. Love, Lehrbuch der Elastizität (Teubner 1907), S. 121 f. und 345.

$$\bar{c} = \frac{1}{\sqrt{\varkappa\varrho}}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{2(1+\sigma)}{3(1-2\sigma)}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sigma}{(3(1-\sigma)}\right)^{3/2}\right]^{-\frac{1}{3}}$$
$$= \frac{\psi(\sigma)}{\sqrt{\varkappa\varrho}}, \qquad (41)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$\psi(\sigma) = \left[\frac{2}{3}\left(\frac{2(1+\sigma}{3(1-2\sigma)}\right)^{3/2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)}\right)^{3/2}\right]^{-\frac{1}{3}}. \qquad (42)$$

In (35) eingesetzt

$$\nu_m = \sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}$$
$$= 5{,}28\cdot 10^7\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}. \qquad (43)$$

a ist das Atomgewicht und es wurde $V = a/\varrho$ benutzt. Nach (38) ist endlich

$$\Theta_{\text{Deb.}} = \frac{h}{k}\sqrt[3]{\frac{3N}{4\pi}}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}$$
$$= 2{,}57\cdot 10^{-3}\,\frac{\psi(\sigma)}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}. \qquad (44)$$

Tabelle IV.

Vergleich der thermisch angepaßten Θ-Werte mit den auf andere Weise berechneten.

1	2	3	4	5	6
Berechn.-Art:	thermisch	elastisch[1])	a. Schm.-P.	optisch	therm. Ausd.
Glng. i. Text:	(37[2])	(35); (38) u. (44)	(47)	(49) u. (50)	(48)
Pb	88	75	89	—	105
Tl	96	—	89	—	—
Hg	97	—	61	—	—
J	106	—	60	—	—
Cd	168	174	133	—	—
Na	172	—	191	—	—
KBr	177	—	216	R: 177	—
Ag	215	220	211	—	210
Ca	226	—	238	—	—
KCl	230	227[2])	271	R: 230 D: 217	—
Zn	235	—	211	—	—
$NaCl$	281	305[2])	355	R: 281 D: 260	—
Cu	315	341	326	—	325
Al	398	413	369	—	374
Fe	453	484	399	—	413
CaF_2	474	510[2])	567	R: {442, 635} D: 412	—
FeS_2	645	696[2])	—	—	—
C(reg.)	1860	—	1564	—	1860

1) Die Zahlen Debyes (l. c.) sind entsprechend der etwas geänderten Wahl der universellen Konstanten (45) mit 1,036 multipliziert.

2) Nach G. Hopf u. L. Lechner, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 643, 1914. — S. u. Gl. (54).

Die verwendeten Zahlenwerte sind

$$h = 6{,}55\times 10^{-27}\,\text{erg sec};\; k = 1{,}347\times 10^{-16}\,\frac{\text{erg}}{{}^0\text{C}};$$
$$\frac{h}{k} = 4{,}863\times 10^{-11}\,\text{sec}\,{}^0C;\; N = 6{,}17\times 10^{23}.\text{[1]}) \qquad (45)$$

Tab. IV, Spalte 2 und 3 gibt eine Gegenüberstellung der so gefundenen Θ-Werte mit den früher benutzten (über die Durchführung der Berechnung für die anisotropen $NaCl$, KCl, CaF_2, FeS_2 s. u. § 17). Die Übereinstimmung ist im großen und ganzen sicherlich hinreichend, um die tatsächliche Wesensgleichheit der Wärmebewegung und der makroskopischen elastischen Schwingungen zu erhärten.

Andere Formeln für die Eigenfrequenz.

§ 14. Debyes Auffassung und Berechnung der Wärmeschwingungen als Überlagerung akustischer Schwingungen aller möglicher Frequenzen erscheint als die konsequente dynamische Weiterbildung des Einsteinschen Gedankens, daß ν von der Atommasse und vom statisch-elastischen Verhalten des Körpers abhängen muß (s. o. § 7). Und obwohl es gerade das Wesentlichste an der Debyeschen Theorie ist, daß sie mit dem Begriff: „die Eigenfrequenz" aufräumt, übernimmt die obere Grenzfrequenz ν_m doch in mancher Hinsicht die Rolle, die jener Begriff in der älteren Auffassung gespielt hatte[2]).

Schon Einstein hatte aus sehr einfachen Überlegungen[3]) (oder am besten aus einfachen „Dimensionsbetrachtungen"[4])) die von uns früher mit Stillschweigen übergangene Beziehung abgeleitet

$$\nu \simeq \frac{3\cdot 10^7}{a^{1/3}\varrho^{1/6}\varkappa^{1/2}}, \qquad (46)$$

von der sich (43) nur durch genauere Angabe des Zahlenfaktors und durch den (dimensionslosen) Faktor $\psi(\sigma)$ unterscheidet. In dem Erfolg Debyes spiegelt sich also auch die tiefe Berechtigung jener älteren, mehr qualitativen und die Größenordnung von ν betreffenden Überlegungen[5]).

Von den Versuchen, ν bzw. Θ mit anderen,

1) Nach Nernsts Monografie über den neuen Wärmesatz, S. 199. (Halle a. S., bei Knapp, 1918.)

2) Wegen des Faktors ν^2 in (30) liegt das Gros der Eigenschwingungen nicht sehr weit von ν_m. Zwischen ν_m und $\nu_m/2$ liegt z. B. schon $1-\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 7/8$ aller!

3) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **34**, 170 u. 590, 1911.

4) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **35**, 679, 1911.

5) Dasselbe gilt von einer ähnlichen Frequenzformel Madelungs, der den Zusammenhang zwischen elastischer und optischer Frequenz (s. u.) zuerst entdeckte. Madelung, Gött. Nachr. 1909, S. 100; 1910, S. 43. S. a. Sutherland, Phil. Mag. (4) **20**, 657, 1910.

insbesondere mit leichter zugänglichen Materialkonstanten in Zusammenhang zu bringen[1]), war der Lindemannsche[2]) von ziemlich gutem Erfolg. Aus der einfachen Vorstellung, das Schmelzen trete dann ein, wenn die Atomamplituden so groß geworden sind, daß Nachbaratome miteinander kollidieren, leitete er die Beziehung ab

$$\nu = 2{,}80 \cdot 10^{12} \sqrt{\frac{T_s}{a V^{2/3}}}, \quad \Theta = \frac{h\nu}{k}$$

$$= 136{,}1 \sqrt{\frac{T_s}{a V^{2/3}}}. \qquad (47)$$

[T_s = Schmelztemperatur, alle Zahlen in

cm — g — sec — °C].

Den Zahlenfaktor liefert die Theorie allerdings nur der ungefähren Größenordnung nach. Die mit obigem Faktor[3]) berechneten Θ-Werte sind in Sp. 4 der Tab. IV den thermischen (Sp. 2) gegenübergestellt. Bei Verbindungen wurde für a nach dem Vorgang von Rubens[4]) das reziproke Mittel aus den Reziprokwerten der Komponenten gesetzt[5]). — So mäßig zum Teil die Übereinstimmung im einzelnen ist, so wird doch der Gang im großen zweifellos richtig wiedergegeben. —

Aus der Grüneisenschen Theorie[6]) des festen Körpers ergibt sich für die Atomfrequenz

$$\nu_0 = 2{,}91 \times 10^{11} \sqrt{\frac{1}{a V_0^{2/3}} \left(\frac{C_v}{\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial T}} \right)_0}. \qquad (48)$$

Der Index „o" soll andeuten, daß theoretisch der Grenzwert für den absoluten Nullpunkt zu nehmen ist, bzw. resultiert. Der Zahlenfaktor ergibt sich wieder nicht ganz präzise, aber der Größenordnung nach aus der Theorie. Spalte 6 der Tab. IV enthält einige nach (48) berechnete Werte von Θ (d. i. von $\frac{h\nu_0}{k}$). —

Von ganz besonderem Interesse aber ist die nahe Beziehung zwischen dem thermischen und optischen Verhalten bei den durchsichtigen Verbindungen KCl, $NaCl$, KBr und CaF_2. Diese Körper besitzen bekanntlich[1]) an einer (Flußspat an zwei) Stelle im Ultrarot ein ausgezeichnetes selektives Reflexionsvermögen („Reststrahlen"). Rechnet man nun aus der betreffenden Reststrahlwellenlänge λ_R die Frequenz

$$\nu_R = \frac{c}{\lambda_R} = \frac{3 \times 10^{10}\,\mathrm{cm\,sec^{-1}}}{\lambda_R} \qquad (49)$$

und daraus eine Größe Θ_R

$$\Theta_R = \frac{h\nu_R}{k} = \frac{1{,}459}{\lambda_R}, \qquad (50)$$

so fällt diese (s. Spalte 5 Tab. IV) mit $\Theta_{\mathrm{therm.}}$, wenigstens für die binären Verbindungen praktisch zusammen. Die Grenzfrequenz ν_m ist also in diesen Fällen mit der Reststrahlenfrequenz identisch.

In Spalte 5 sind auch noch einige Θ-Werte eingetragen, die in derselben Weise aus den Eigenwellenlängen der optischen und ultraroten Dispersionsformeln berechnet wurden (durch D gekennzeichnet)[2]). Sie stimmen mit dem thermischen Wert weniger gut, aber doch auch noch einigermaßen überein. —

Nach der älteren „monochromatischen" Auffassung war die optische Wirksamkeit der thermischen Frequenz leicht durch elektrische Ladungen der schwingenden Atome zu erklären[3]). Sie bietet sich dem Verständnis nicht mehr so unmittelbar dar, sobald wir ν_m mit Debye nur als obere Grenzfrequenz aufzufassen gezwungen sind. Die beiden Auffassungen werden sich einigermaßen vereinigen lassen in einem detaillierteren atomistischen Strukturbild, dessen wir, wie sich gleich zeigen wird, auf die Dauer ohnedies nicht entraten können.

Diskussion der Debyeschen Theorie fortgesetzt.

§ 15. Bisher hatten wir unser Augenmerk ausschließlich auf jene „thermisch einfache" Körperklasse gerichtet, die dem Gesetz der übereinstimmenden Zustände folgt. Sehr viele Stoffe — vermutlich wohl die überwiegende Mehrzahl — folgen ihm nicht, sondern zeigen einen individuellen, durch eine Debye-Funktion nicht quantitativ darstellbaren C_v-Verlauf.

1) Eine dankenswerte vergleichende Zusammenstellung gibt C. E. Blom, Ann. d. Phys. (4) **42**, 1397, 1913. — S. a. noch H. Alterthum, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 68, 1913; C. Benedicks, Ann. (4) **42**, 154, 1913; S. Pagliani, Cim. (6) **10**, 5, 1915; Lincei Rend. (5) **24**, [1], 835 u. 948, 1915; Gazz. chim. ital. **45**, 66, 1915.

2) F. A. Lindemann, diese Zeitsch. **11**, 609, 1910. — Zur theoretischen Begründung s. a. A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) **35**, 689, 1911; E. Grüneisen, Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 845, 1911.

3) Nernst (l. c. „Gött. Vorträge" S. 76) und Blom (l. c. Ann. d. Phys. **42**, S. 1397) verwenden einen um 10 Proz. größeren Faktor.

4) Rubens u. Wartenberg, Berl. Ber. 1914, S. 169.

5) Die Korefsche Übertragung der Formel auf Verbindungen (diese Zeitschr. **13**, 183, 1912) muß mit dem Verlassen der „monochromatischen" Theorie als überholt gelten.

6) E. Grüneisen, Ann. d. Phys. (4) **39**, 291 ff., 1912.

1) Rubens u. H. v. Wartenberg, Berl. Ber. 1913, S. 513; 1914, S. 169; Rubens, Berl. Ber. 1915, S. 4.

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik, 2. Aufl. (1906) S. 374.

3) Für Diamant hat schon Einstein — allerdings nur vorübergehend — eine optische Eigenwellenlänge bei $\lambda = 11\,\mu$ gefordert. W. W. Coblentz [Carnegie Institut, Washington 1908] will sie bei $\lambda = 12\,\mu$ gefunden haben, nach Reinkober (Diss. Berlin 1910) ist sie nicht vorhanden.

Tabelle V gibt einen Überblick über das bis jetzt vorliegende Beobachtungsmaterial. Soweit Formeldarstellungen von den Autoren versucht wurden, sind sie in der 5. Spalte angegeben. Und zwar wurden sie auch für Verbindungen einheitlich auf das durchschnittliche Grammatom (nicht Mol) bezogen und auf konstanten Druck, d. h. eine etwa angebrachte $(C_p - C_v)$-Korrektion

Tabelle V.

1	2	3	4	5	6
Stoff	Formel[1])	Kristall-system	Temp.-interv.[2])	(durchschn.) Atomwärme C_p	Neuere Literaturstellen
Graphit	C	hexag.	29—1250	$\frac{1}{10}L(350)+\frac{9}{10}L(1850)$	Nernst 1, Koref, Weber.
Schwefel	S	rhomb.	23—297	$\frac{1}{4}L(74)+\frac{3}{4}L(510)$	Nernst 1, Koref, Lindemann
Jodsilber	AgJ	hexag. u. quadr.	18—330	$\frac{1}{2}L(70)+\frac{1}{2}L(220)+10\cdot 10^{-5}T^{3/2}$	Nernst 1, 7; Dewar, Koref, Magnus, Ewald.
Chlorsilber	$AgCl$	reg.	22—430	$\frac{1}{2}L(110)+\frac{1}{2}L(250)+11\cdot 10^{-5}T^{3/2}$ $\frac{1}{2}D(102)+\frac{1}{2}E(179)+A'C_p^2T$	Nernst 1, 7; Eucken 1; Magnus, Ewald. Nernst 8.
Chlorblei	$PbCl_2$	rhomb.	16—430	$\frac{1}{3}L(85)+\frac{2}{3}L(270)+6\cdot 10^{-5}T^{3/2}$ $\frac{1}{3}D(\Theta)+\frac{1}{3}E(\Theta')+\frac{1}{3}E(\Theta'')+A'C_p^2T$	Nernst 1; Eucken 1; Magnus, Schottky. Nernst 8.
Quarz	SiO_2	hexag.	26—556	$\frac{1}{9}L(186)+\frac{8}{27}L(570)+\frac{16}{27}L(1450)$	Nernst 1, Koref, Magnus.
		am.	26—556	$\frac{1}{9}L(160)+\frac{8}{27}L(550)+\frac{16}{27}L(1500)$	
Benzol	C_6H_6	rhomb.	24—263	$\frac{1}{6}L(155)+\frac{5}{6}L(1640)$	Nernst 1, Bogojawlensky.
Kalomel	$HgCl$	tetrag.	93—331	$\frac{1}{2}L(93)+\frac{1}{2}L(324)+6\cdot 10^{-5}AT^{3/2}$	Pollitzer, Magnus, Eucken 1; Nernst 8.
Mercurosulfat	Hg_2SO_4	monokl.	24—290	$\frac{2}{7}L(100)+\frac{1}{7}L(200)+\frac{4}{7}L(1050)$	Pollitzer, Schottky.
Thalliumchlorür	$TlCl$	reg.	23—297	$\frac{1}{2}L(96)+\frac{1}{2}L(192)+8\cdot 10^{-5}T^{3/2}$	Pollitzer, Russell.
Eis	H_2O	hexag.	23—273	$\frac{1}{6}L(166)+\frac{1}{3}L(725)+\frac{2}{3}L(2500)+0{,}015\cdot e^{\frac{T-220}{18}}$ [3]) $\frac{1}{6}D(155)+\frac{1}{6}E(355)+\frac{2}{3}E(1130)$	Pollitzer, Nernst 1; Koref. Nernst 8.
Zinksulfat	$ZnSO_4\cdot 7H_2O$	rhomb.	27—293	$\frac{4}{27}L(184)+\frac{12}{27}L(675)+0{,}041\,e^{\frac{T-250}{15}}$ [3])	Pollitzer, Schottky.
Schwefel	S	monokl.	83—294	—	Nernst 1; Koref.
Ferrocyankalium	$K_4FeCy_6\cdot 3H_2O$	monokl.	83—292	—	Nernst 1; Koref, Lindemann, Schottky.
Oxalsäure	$(COOH)_2\cdot 2H_2O$	?	84—298	—	Nernst 1; Koref, Lindemann.
Na-phosphat	$Na_2HPO_4\cdot 5H_2O$ u. $12H_2O$	monokl.	82—291	—	Nernst 1; Koref, Lindemann.
Carborundum	CSi	rhomb.	22—96	$\frac{1}{2}D(913)+\frac{1}{2}E(593)$	Nernst 7; Günther, Russell, Weigel.
Ca-Oxyd	CaO	regul.	28—661	—	Nernst 7; Magnus, Ewald, Lindemann.
Ca-Hydroxyd	$Ca(OH)_2$	hexag.	21—245	—	Nernst 7; Koref, Ewald.
Ca-Karbonat	$CaCO_3$	hexag.	22—659	—	Nernst 7; Magnus, Lindemann.
Alaun	$Al_2(SO_4)_3\cdot K_2SO_4\cdot 24H_2O$	reg.	26—91	—	Nernst 7.
Magnesium	Mg	?	27—773	—	Nernst 7; Ewald, Schübel.
Silizium	Si	reg.	20—297	—	Nernst 7; Russell, Weber.
Bleioxyd	PbO	rhomb. tetrag.	21—417	—	Nernst 7; Magnus, Russell.
Bleijodid	PbJ_2	hexag.	22—402	—	Nernst 7; Magnus, Koref, Schottky.

1) Ohne Rücksicht auf die Vielfachheit.
2) das die Messungen umspannen, eventuell jenes (engere), für das die Formeldarstellung gemeint ist.
3) Die e-Potenz soll dem abnormalen Anstieg bei Annäherung an den Schmelzpunkt Rechnung tragen.

Tabelle V (Fortsetzung).

1	2	3	4	5	6
Stoff	Formel[1])	Kristall-system	Temp.-interv.[2])	(durchschn.) Atomwärme C_p	Neuere Literaturstellen
Ca-hydrid	CaH_2	?	70—81	$^1/_2 D(391)$ [1])	Günther.
Zinkblende	ZnS	reg.	22—59	$^1/_2 D(175)$ [1])	Günther.
Magnesia	MgO	?	39—83	$^1/_2 D(768) + {}^1/_2 E(552)$	Günther, Magnus, Russell.
Aragonit	$CaCO_3$	rhomb.	23—56	$^1/_5 D(317) + {}^1/_5 E(280)$	Günther.
Hg-Oxyd	HgO	rhomb. u. klinorh.	25—75	$^1/_2 D(134) + {}^1/_2 E(417)$	Günther, Russell.
Berylloxyd	BeO	hexag.	77—85	$^1/_2 D(1010)$ [1])	Günther.
Kohlendioxyd	CO_2	?	19—200	$^1/_3 D(137{,}7) + {}^1/_3 E(195) + {}^1/_3 E(750) + ?$	Eucken 2; v. Kohner, Diss. Berlin 1914.
Argon	Ar	?	18—78	$D(85) + 45 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.
Stickstoff	N	?	17—61	$D(98) + 16{,}2 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2; K.-Onnes 4.
Sauerstoff	O	?	17—40	$D(113) + 64 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.
Kohlenoxyd	CO	?	18—57	$D(119) + 66 \cdot 10^{-5} C_p^2 T$ [2])	Eucken 2.

1) Man beachte, daß dies nicht gewöhnliche Debye-Darstellungen sind, wie in Tab. II u. Fig. 6, da der Faktor von $D(\Theta)$ kleiner als 1 ist.

2) Diese vier Stoffe wären formal zu den „thermisch einfachen" zu rechnen; doch sind die abnorm großen Korrektionsglieder ($A' C_p^2 T$) unsicher und die Übereinstimmung zum Teil recht mangelhaft; bei N und O liegt je ein Umwandlungspunkt in dem umspannten Intervall.

Literatur zu Tabelle V. (s. a. Literatur zu Tabelle II); Bogojawlensky: G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen, S. 45. — Eucken 1, diese Zeitschr. **10**, 586, 1909; Eucken 2: Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 4 1916. — Nernst 8, Vorträge über die kinetische Theorie usw., bei Teubner 1914, S. 63ff. — K.-Onnes 4, W. H. Keesom und H. K.-O., Amst. Proc. **18**, 1247, 1916 [Leiden Comm. 149a]. — H. Schottky, diese Zeitschr. **10**, 634, 1909. — O. Weigel, Gött. Nachr. 1915, S. 299.

ist in Evidenz gesetzt. $E(\Theta)$, $L(\Theta)$, $D(\Theta)$ bedeuten bzw. die Einsteinsche Funktion (22), die Nernst-Lindemannsche Funktion (27²) und die Debyesche Funktion (37²). Die Darstellungen beruhen zum Teil auf der älteren „monochromatischen" Auffassung, in deren folgerichtiger Erweiterung den Verbindungen zwei oder mehrere scharfe Eigenfrequenzen zugeschrieben wurden[1]). Vielfach haben sie — schon wegen der Unsicherheit oder Nichtberücksichtigung der C_p-Korrektion — lediglich interpolatorischen Charakter. Eine theoretische Wertung der Formelbildungen wird sich z. T. in den folgenden Abschnitten ergeben.

Erinnert man sich der sehr allgemeinen Grundlagen unserer Rechnung, die keinerlei spezielle Vorstellung über den Aufbau der Materie aus den Atomen, sondern lediglich die makroskopischen Körpereigenschaften benutzt, so ist es überraschend und unerfreulich, daß sie — wenn überhaupt — nicht allgemein gilt. Eine kritische Revision zeigt aber, daß ersteres — die Gültigkeit überhaupt — überraschend genug ist. Gl. (35), welche ν_m bestimmt, spricht nämlich unmittelbar aus, daß die zur Grenzfrequenz ν_m gehörige Länge elastischer Wellen im Körper:

$$\frac{c_l}{\nu_m} \sim \frac{c_t}{\nu_m} \sim \frac{\bar{c}}{\nu_m} \tag{50}$$

von derselben Größenordnung ist, wie der mittlere Atomabstand:

$$\sqrt[3]{\frac{V}{N}}. \tag{51}$$

Daß ein aus Atomen aufgebautes Medium sich bei so kurzen Wellen noch wie ein Kontinuum verhalte, ist nicht zu erwarten und die Verwendung von (30) für dieses Frequenzgebiet erscheint höchst bedenklich[1]).

Von diesem Einwand bleibt unberührt das Gebiet tiefster Temperatur. Denn die Art, wie die Energie jeder Eigenschwingung [Gl. (14)] von ν und T abhängt[2]), bringt es mit sich, daß bei genügender Abkühlung die Schwingungen von der Größenordnung ν_m als erste jeden Einfluß auf die Atomwärme verlieren. Und für die

1) Vgl. bes. A. S. Russell, diese Zeitschr. **13**, 59, 1912; Koref ebend. S. 183, 1912. — Demgemäß hat Nernst anfänglich auch $NaCl$ und KCl durch zwei Eigenfrequenzen dargestellt.

1) Vgl. W. Nernst und F. A. Lindemann, Berl. Ber. 1912, S. 1166.

2) $\dfrac{\partial E(\nu, T)}{\partial T}$ ist (ebenso wie C_v nach (22)) nur Funktion von $\dfrac{T}{\nu}$ und verschwindet für kleine Werte dieses Arguments.

niedrigeren, deren zugehörige Wellenlänge groß gegen den Atomabstand, gibt (30) wohl sicher die richtige Verteilung.

Zu dieser Kritik stimmt es nun ausgezeichnet, daß, wie schon oben betont, die Koinzidenz der C_v-Verläufe (Fig. 6) untereinander und mit der Debyeschen Funktion gerade bei tiefer Temperatur besonders scharf ist, während die Abweichungen später erheblicher werden und einzelne Stoffe (Fe, FeS_2) überhaupt nur in einem nach oben beschränkten Temperaturbereich zu den thermisch einfachen gezählt werden dürfen. Unsere jetzige Überlegung verlangt darüber hinaus, daß das Grenzgesetz, welches aus (37^2) für $\lim T = 0$, d. i. $\lim x = \infty$, folgt, überhaupt für alle Stoffe Gültigkeit besitze[1]).

1) P. Debye l. c., Ann. d. Phys. **39**, 801.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

M. Abraham, Theorie der Elektrizität. Erster Band: Einführung in die Maxwellsche Theorie der Elektrizität. Mit einem einleitenden Abschnitt über das Rechnen mit Vektorgrößen in der Physik von Dr. A. Föppl. Fünfte, umgearbeitete Auflage, herausgegeben von Dr. M. Abraham. Mit 11 Figuren im Text. Leipzig, B. G. Teubner. 1918. Geh. M. 13.—, geb. M. 14.—.

Das Abrahamsche Lehrbuch ist so bekannt, daß eine Inhaltsangabe hier unnötig ist. Die 2. Auflage ist in dieser Zeitschrift **6**, 527, 1905 besprochen. Die hier vorliegende 5. Auflage weicht nur wenig von der 4., diese aber erheblich von den vorhergehenden, insbesondere der 2. Auflage ab. Die Vektoreneinleitung ist knapper und in mehrfacher Hinsicht dem speziellen Zwecke angepaßter und klarer abgefaßt als früher. Ferner ist das Kapitel über die „Spannungen" des elektromagnetischen Feldes umgearbeitet und weit eingehender gehalten worden. Erwähnung verdient die Behandlung des „Hertzschen Vektors" (S. 79). Die Elektrodynamik bewegter Körper findet man etwas reduziert, und der hierher gehörende Stoff ist zum Teil in den zweiten Band verlegt worden. Ein Parallellesen beider Auflagen dürfte dem Studierenden von Vorteil sein. Im übrigen bedarf das Werk keiner weiteren Empfehlung. Zu wünschen wäre es, daß auch der zweite Band möglichst bald eine dem jetzigen Stande der Dinge entsprechende Neuauflage erleben würde.

H. Hörig.

W. Donle, Lehrbuch der Experimentalphysik für höhere Lehranstalten. 9. u. 10. verbesserte Aufl. 8. VIII u. 393 S. mit 464 Abb., 1 Spektraltafel, 620 Aufgaben und zahlreichen Übungen für das Schülerpraktikum. Stuttgart, Fr. Grub. 1918. Geb. M. 4,80 einschl. T.-Z.

Die neue Doppelauflage des in dieser Zeitschr. **17**, 163, 1916 besprochenen Lehrbuches ist gegen die vorige nach Inhalt, Anordnung und Darstellung des Stoffes im wesentlichen unverändert geblieben. Nur kleinere Abschnitte, z. B. über Kreiselbewegung, Luftfahrzeuge, elektrische Wellen, Prismenfernrohre, Beugungs- und Polarisationsapparate sind eingefügt, um die Schüler mit den wichtigsten neueren Anwendungen der Physik bekannt zu machen.

Götting.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Hamburg der a. o. Professor an der Universität Marburg Dr. Alfred Wegener für Meteorologie, an der Universität Leipzig Dr. W. Möbius für Physik, an der Technischen Hochschule Berlin der Realgymnasial-Oberlehrer Dr. Alfred Baruch für Mathematik, an der Universität Rostock Dr. Günter Falckenberg für angewandte Physik.

Ernannt: Der Direktor des Instituts für Kohlenforschung in Breslau Professor Dr. Fritz Hofmann zum ord. Honorarprofessor für Chemie und Hüttenkunde an der Technischen Hochschule daselbst, der Professor der Chemie an der Columbia Universität in New York Dr. Samuel Tucker zum Chefchemiker an der Chemical Foundation Inc., der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Otto Haupt zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Rostock.

Gestorben: Der a. o. Professor der Physik und Honorardozent für Meteorologie und Klimatologie an der Deutschen Technischen Hochschule Brünn Dr. Arthur Szarvassi, der ord. Professor der Astronomie und Mathematik an der Universität Leipzig Geh. Hofrat Dr. Heinrich Bruns, der ord. Professor der Astrophysik an der Universität Catania und Leiter des Observatoriums auf dem Ätna Dr. Annibale Ricco, der frühere Privatdozent der Physik an der Universität Berlin Dr. Leo Arons.

Angebote.

Akademisch gebildeter

Physiker oder Laboratoriumsingenieur

mit Spezialausbildung auf dem Gebiete der Hochfrequenz, Gaselektrizität und Hochspannung für unser Hochspannungslaboratorium zum sofortigen Eintritt gesucht. Einige Praxis erwünscht. Angebote mit Lichtbild, Lebenslauf und Gehaltsansprüchen an das **Personalbüro** des

Kabelwerk

der Siemens-Schuckertwerke G. m. b. H. Siemensstadt bei Berlin (Gartenfeld).

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.